Conceitos Matemáticos & Notações

Apêndice A: Notações

- $\Delta x, \delta x$: uma pequena mudança em x
- $\frac{\partial}{\partial t}$: a derivada parcial em relação a t mantendo as outras variáveis fixadas
- $\frac{d}{dt}$: a derivada no tempo de uma quantidade que é função apenas do tempo
- $\dot{x}$: derivada no tempo de x, $\frac{\partial x}{\partial t}$
- $\ddot{x}$: derivada no tempo de segunda ordem de x, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$
- $\frac{D}{Dt}$: derivada material (de Lagrange), a taxa de variação de uma característica seguindo um elemento de fluido.

Abaixo, **negrito** indica os campos vetoriais, α é uma constante, e todas as outras variáveis são campos escalares. As componentes de um campo vetorial **f** são indicadas como (f^x, f^y, f^z). Em adição, utilizamos a convenção em ciências atmosféricas em que o vetor vento tridimensional **v** = (u, v, w) e o vetor vento horizontal **u** = (u, v), onde u = $\frac{dx}{dt}$ é o vento na direção leste-oeste local, v = $\frac{dy}{dt}$ é o vento na direção norte-sul local e w = $\frac{dz}{dt}$ é o vento na vertical local. Finalmente, $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ são vetores unitários locais na direção das coordenadas x, y, z, respectivamente.

Apêndice B: Cálculos Vetoriais

Operadores Vetoriais

Quantidades Úteis

Fórmulas Vetoriais

Abaixo, **a**, **b**, **c** são campos vetoriais, ψ é um campo escalar e α é uma constante.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{B.1}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{B.2}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \tag{B.3}$$

$$\nabla(\alpha\psi) = \alpha\nabla\psi \tag{B.4}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \nabla\cdot\mathbf{a}+\nabla\cdot\mathbf{b} \tag{B.5}$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a}) = \psi\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\nabla\psi \tag{B.6}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{a}) = \nabla\psi\times\mathbf{a}+\psi\nabla\times\mathbf{a} \tag{B.7}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0 \tag{B.8}$$

$$\nabla\times(\nabla\psi) = 0 \tag{B.9}$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a} \tag{B.10}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = (\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{a}+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \tag{B.11}$$

Nome	Vetor/Escalar	Notação Vetorial	Expansão Cartesiana
Gradiente	vetor	∇	$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$
Laplaciano 2-D (escalar)	escalar	$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Divergente de um vetor	escalar	$\nabla\cdot\mathbf{v}$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$
Rotacional de um vetor 2-D	vetor	$\nabla\times\mathbf{u}$	$(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Rotacional de um vetor 3-D	vetor	$\nabla\times\mathbf{v}$	$(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})\hat{\mathbf{i}}+(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\hat{\mathbf{j}}+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Determinante Jacobiano 2-D	escalar	$J(\psi\zeta)$	$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$

Nome	Relação	Coordenadas Cartesiana
Vorticidade	$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{v}$	$\boldsymbol{\omega}=(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})\hat{\mathbf{i}}+(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\hat{\mathbf{j}}+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Vorticidade na direção $\hat{\mathbf{k}}$	$\boldsymbol{\omega}^z=\zeta=\nabla\times\mathbf{u}$	$\zeta=(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Função de corrente	$\psi,\nabla^2\psi=\zeta,\mathbf{v}=\hat{\mathbf{k}}\times\nabla\psi$	$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$

Apêndice C: Derivada Material

Derivada material 2-D de um campo escalar

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} \tag{C.1}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho \tag{C.2}$$

É importante conhecer os operadores $\mathbf{v}\cdot\nabla()$ e $\mathbf{u}\cdot\nabla()$, pois são operadores de adivecção em 3-D e 2-D, respectivamente.

Derivada material 3-D de um campo escalar

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \tag{C.3}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T \tag{C.4}$$

Derivada material 3-D de um campo vetorial

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \tag{C.5}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{f} \tag{C.6}$$

e para uma particular componente de **f**

$$\frac{Df^x}{Dt} = \frac{\partial f^x}{\partial t} + u\frac{\partial f^x}{\partial x} + v\frac{\partial f^x}{\partial y} + w\frac{\partial f^x}{\partial z} \tag{C.7}$$

Forma Advectiva vs Fluxo

A forma do fluxo de uma quantidade pode ser escrita como:

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) \tag{C.8}$$

A forma advectiva de uma quantidade pode ser escrita como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{C.9}$$

Usando B.6 e C.2, pode ser mostrado que a C.8 e C.9 sÃ£o idÃªnticos.

Apêndice D: Teoremas

Teorema da divergência (teorema de Gauss)

O teorema da divergência refere-se a integral da divergência de um campo vetorial **a** sobre um volume V para o fluxo total do campo vetorial, para fora da superfície fechada A que circunda o volume V:

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \iint \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dA, \tag{D.1}$$

onde **a** é um campo vetorial arbitrário e **n** é a unidade para fora normal à superfície A.

Teorema de Stokes

O teorema de Stokes é o "rotacional análogo"do teorema de Gauss. Ele relaciona a integral da componente normal de $\nabla\times$ **a** sobre uma superfície aberta A para a integral de linha de **a** em torno de uma superfície fechada A:

$$\iint (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \tag{D.2}$$

Apêndice E: Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas

Coordenadas verticais generalizadas

Considere uma coordenada vertical geral r, que é assumido como sendo uma função monotônica de altura z. Se você desejar transformar as equações do movimento em um sistema de coordenadas (x, y, r, t) a partir de (x, y, z, t), então z = z(x, y, r, t) torna-se uma variável dependente. Qualquer função A = A (x,y, z, t) = A (x, y, z (x, y, R, t), t) pode ser transformada em um novo sistema de coordenadas, onde as derivadas horizontal e de tempo se transformam como

$$\left.\frac{\partial A}{\partial s}\right|_r = \left.\frac{\partial A}{\partial s}\right|_z + \left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_s \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_r \tag{E.1}$$

onde s denota x, y ou t e $|_a$ denota explicitamente uma diferencial com a mantido constante. A derivada parcial vertical de A resulta simplesmente da regra da cadeia. Isso é,

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r}. \tag{E.2}$$

O gradiente de A ao longo de uma superfície de r constante é, portanto,

$$\nabla_r A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\nabla_r z. \tag{E.3}$$

É importante lembrar que as direções dos vetores unitários ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$) são iguais em ambos os sistemas de coordenadas r e z. Isto é, os eixos x e y estão sempre na posição horizontal e *não* são orientados ao longo de superfícies de r constante e o eixo vertical é ainda perpendicular à x e y.

Coordenadas curvilíneas gerais

A expressão métrica em coordenadas curvilíneas gerais x_1, x_2, x_3 é

$$(dl)^2 = (h_1 dx_1)^2 + (h_2 dx_2)^2 + (h_3 dx_3)^2, \tag{E.4}$$

onde dl é um elemento de comprimento e h_1, h_2, h_3 são os coeficientes métricos. Seja **i**, **j**, **k** os vetores unitários locais na direção das coordenadas x_1, x_2, x_3. O gradiente de um escalar p, o divergente e rotacional de um vetor **v** (com componentes u, v, w) são então dados por

$$\nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{h_1 \partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{h_2 \partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{h_3 \partial x_3}, \tag{E.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial (h_2 h_3 u)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 v)}{\partial x_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 w)}{\partial x_3}\right], \tag{E.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial (h_3 w)}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_2 v)}{\partial x_3}\right] + \frac{\mathbf{j}}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial (h_1 u)}{\partial x_3} - \frac{\partial (h_3 w)}{\partial x_1}\right] + \frac{\mathbf{k}}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial (h_2 v)}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 u)}{\partial x_2}\right]. \tag{E.7}$$

A fórmula (E.4) também pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{pmatrix} h_1 \mathbf{i} & h_2 \mathbf{j} & h_3 \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ h_1 u & h_2 v & h_3 w \end{pmatrix}. \tag{E.8}$$

Coordenadas cartesianas

Agora vamos aplicar essas fórmulas gerais em coordenadas cartesianas. A expressão métrica em coordenadas cartesianas é

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \tag{E.9}$$

que é obtida a partir de (E.1) usando $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$ e usando a notação x, y, z no lugar de x_1, x_2, x_3. Se **i**, **j**, **k** denotam vetores unitários nas direções leste, norte e vertical, temos para o gradiente, divergência e rotacional

$$\nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{E.10}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{E.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{E.12}$$

A fórmula (E.9) pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w. \end{pmatrix}. \tag{E.13}$$

Coordenadas cilíndricas

Agora vamos aplicar as fórmulas gerais em coordenadas cilíndricas r, ϕ, z, onde r é o raio, ϕ é o ângulo tangencial, e z é a distância vertical. A expressão métrica em coordenadas cilíndricas é

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\phi)^2 + (dz)^2, \tag{E.14}$$

que é obtida a partir de (E.1) usando $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. Se **i**, **j**, **k** denotam vetores unitários nas direções radial, tangencial e vertical, temos para o gradiente, divergência e rotacional

$$\nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{r\partial \phi} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{E.15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial (ru)}{r\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{E.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{r\partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial rx}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial (rv)}{r\partial r} - \frac{\partial u}{r\partial \phi}\right). \tag{E.17}$$

A fórmula (E.14) pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \mathbf{i} & r\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & rv & w \end{pmatrix}. \tag{E.18}$$

Coordenadas esféricas

Agora vamos aplicar as fórmulas gerais em coordenadas esféricas λ, ϕ, r, onde λ é a longitude, ϕ é a latitude, e r é a distância do centro da Terra ao ponto em questão. A expressão métrica em coordenadas esféricas é

$$(dl)^2 = (rcos\phi d\lambda)^2 + (rd\phi)^2 + (dr)^2, \tag{E.19}$$

que é obtida a partir de (E.1) usando $h_1 = rcos\phi$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. Se **i**, **j**, **k** denotam vetores unitários nas direções leste, norte e vertical, temos para o gradiente, divergência e rotacional

$$\nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{rcos\phi\partial\lambda} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{r\partial\phi} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{E.20}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{rcos\phi\partial\lambda} + \frac{\partial(vcos\phi)}{rcos\phi\partial\phi} + \frac{\partial(r^2 w)}{r^2\partial r}, \tag{E.21}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{r\partial\phi} - \frac{\partial(rv)}{r\partial r}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial(ru)}{r\partial r} - \frac{\partial w}{rcos\phi\partial\lambda}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{rcos\phi\partial\lambda} - \frac{\partial(ucos\phi)}{rcos\phi\partial\phi}\right). \tag{E.22}$$

A fórmula (E.19) pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2cos\phi}\begin{pmatrix} rcos\phi\mathbf{i} & r\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial r} \\ urcos\phi & vr & w \end{pmatrix}. \tag{E.23}$$