EXERCÍCIOS - PARÁBOLA

1) Sabendo que a equação da parábola é $(x-2)^2 = 6(y-4)$, determine:

a) As coordenadas do vértice

b) O parâmetro

c) As coordenadas do foco

d) A equação da reta diretriz

e) O esboço do gráfico

a) A equação é do tipo: $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$

Por analogia, concluímos que:

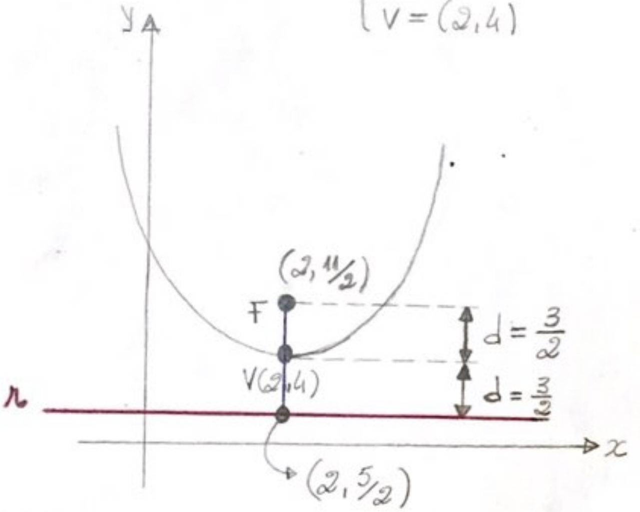
$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \\ 2p = 6 \rightarrow p = 3 \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do vértice são: $\boxed{V=(2,4)}$

b) Conforme visto no item a), o parâmetro vale 3, ou seja, $\boxed{p=3}$

c) sabemos que:

$$\begin{cases} \text{A equação é do tipo } (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \\ \text{eixo de simetria vertical e concavidade para cima} \\ p = 3 \\ V = (2,4) \end{cases}$$



Como o vértice e o foco estão alinhados na vertical, ambos possuem a mesma abcissa.

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt{(\cancel{2-2})^2 + (4-y_2)^2}$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt{(4-y_2)^2} \rightarrow \frac{3}{2} = |4-y_2|$$

$$|4-y_2| = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} 4-y_2 = \frac{3}{2} \rightarrow -y_2 = \frac{3}{2}-4 \rightarrow y_2 = \frac{5}{2} \\ 4-y_2 = -\frac{3}{2} \rightarrow -y_2 = -\frac{3}{2}-4 \rightarrow y_2 = \frac{11}{2} \end{cases}$$

• Os dois valores acima representam as possíveis ordenadas dos pontos equidistantes do vértice em $\frac{3}{2}$ unidades. O maior valor representa a ordenada do foco, e o menor a ordenada de um ponto da diretriz.

Portanto, as coordenadas do foco são:

$$\boxed{F = \left(2, \frac{11}{2}\right)}$$

d) Todos os pontos da diretriz possuem, neste caso, a mesma ordenada. Como já conhecemos um ponto $(2, \frac{5}{2})$, todos os pontos terão ordenadas $5/2$.

A equação da diretriz então:

$$\boxed{y = 5/2}$$

e) Conforme visto na figura acima.

2) Sabendo que a equação da parábola é $y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$. Determine as coordenadas do vértice.

A equação é do tipo: $\begin{cases} (y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \\ \text{ou} \\ (y-y_0)^2 = -2p(x-x_0) \end{cases}$

$$y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$$
$$y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$$
$$y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 2^2 - 8x + 28 - 2^2 = 0$$
$$(y-2)^2 - 8x + 24 = 0$$
$$(y-2)^2 = 8x - 24$$
$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

Lembrete

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

↳ produto notável

Logo, as coordenadas do vértice são: $\boxed{V = (3,2)}$

3) Obten a equação da parábola.

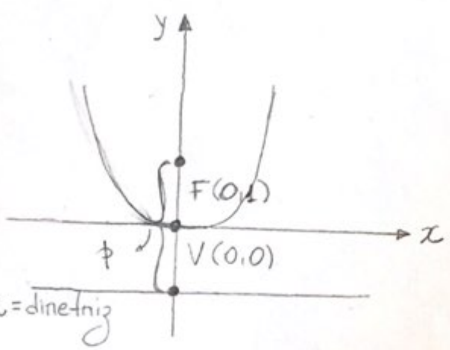
a) Vértice na origem e foco (0,1).

Portanto, $V = (0,0)$ e $F = (0,1)$

x y

↳ O foco é em y.

↳ $x = 0$

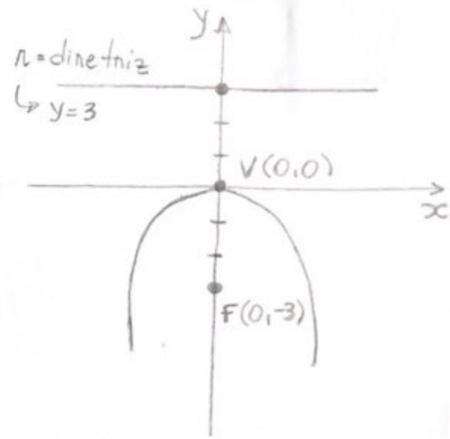


* Concavidade para cima.
* A equação é do tipo: $\boxed{x^2 = 2py}$
* sabe-se que o parâmetro p é o dobro da distância do vértice (V) ao Foco (F). Logo,

$\boxed{p = 2}$

$$x^2 = 2\cdot p\cdot y$$
$$x^2 = 2\cdot 2\cdot y$$
$$\boxed{x^2 = 4y}$$

b) Foco $(0,-3)$ e dinetriz $Y = 3$.



Foco $(0,-3)$: $0 \to x$, $-3 \to y$

↳ O Foco é em y

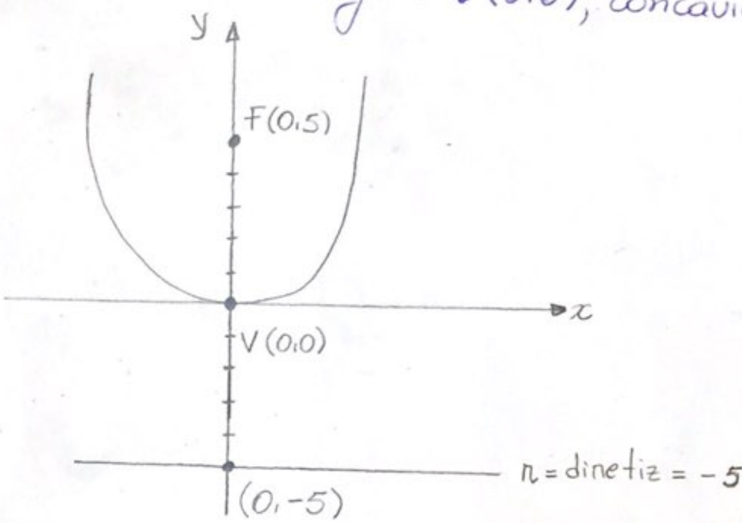
↳ $x=0$

* Concavidade para baixo
* A equação é do tipo: $\boxed{x^2 = -2py}$
* parâmetro $p = 2\cdot\overline{VF} \to p = 2.3 \to \boxed{p=6}$

Logo, a equação da parábola será:

$$x^2 = -2py \to x^2 = -2.6.y \to \boxed{x^2 = -12y}$$

c) Vértice na origem $V(0,0)$, concavidade para cima e $p(-2,5)$.



$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$5 = \sqrt{(0-0)^2 + (0-y_2)^2}$$

$$5 = \sqrt{-y^2} \to 5 = |y^2|$$

$$|y^2| = 5 \to \begin{cases} y^2 = 5 \\ y^2 = -5 \end{cases}$$

Portanto, o foco tem as seguintes coordenadas:

$$\boxed{F = (0,5)}$$

A equação é do tipo: $\boxed{x^2 = 2py}$

Logo, a equação da parábola fica:

$$x^2 = 2.p.y$$

$$x^2 = 2.10.y$$

$$\boxed{x^2 = 20y}$$

O parâmetro é o dobro da distância de $\overline{VF}$. Logo,

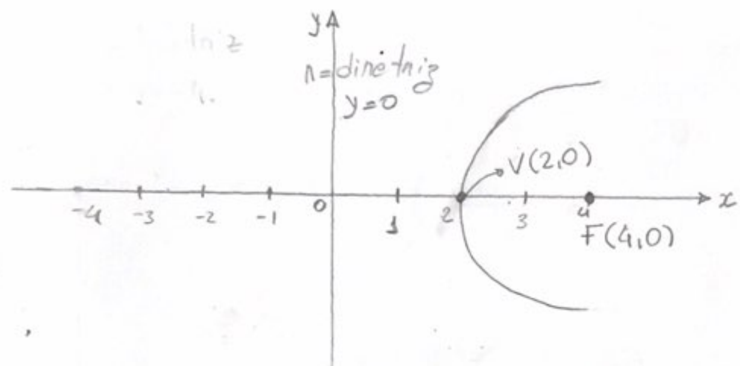
$$p = 2\cdot\overline{VF} \to p = 2.5$$

$$\boxed{p=10}$$

4) Qual a equação da parábola de foco no ponto F(4,0) e vértice no ponto V(2,0)?

R| $F(4,0)$; $V(2,0)$; vértice não é na origem ; $\frac{p}{2} = 2 \rightarrow \boxed{p = 4}$

(x, y ; x_0, y_0)



$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

$$(y - 0)^2 = 2 \cdot 4 (x - 2)$$

$$\boxed{y^2 = 8(x-2)}$$