Exercícios

1) Calcule a distância entre os pontos $P_1 = (-2, -1, 0)$ e $P_2 = (2, 1, 0)$.

R/ $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$= \sqrt{(2-(-2))^2 + (1-(-1))^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \cong 4{,}47 \text{ u.c.}$$

2) Calcule a distância entre ponto $P = (5, 4, 2)$ e a reta

$$r: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

R/ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \rightarrow \text{ponto } P \\ z = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 3 \rightarrow \text{ponto } A \\ z_0 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

1) calculando $\overrightarrow{AP} = P - A = (5, 4, 2) - (4, 3, 0) = (1, 1, 2)$

2) Produto vetorial $\vec{v} \times \overrightarrow{AP}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-3)\hat{i} + (3-4)\hat{j} + (2-1)\hat{k} = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = (-1, -1, 1)$$

3) $d(P, r) = \dfrac{\|(-1, -1, 1)\|}{\|(2, 1, 3)\|} = \dfrac{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \dfrac{\sqrt{1+1+1}}{\sqrt{4+1+9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$

$\boxed{d(P, r) \cong 0{,}46}$ u.c.

3) Calcule a distância entre o ponto e o plano.

$P = (3,2,1)$ e $\pi: 3x + 2y + 4z + 6 = 0$.

R) $d(P,\pi) = \dfrac{\|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 4 \\ d = 6 \end{cases}$

Então, $d(P,\pi) = \dfrac{\|3(3)+2(2)+4(1)+6\|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = \dfrac{\|9+4+4+6\|}{\sqrt{9+4+16}} = \dfrac{\|23\|}{\sqrt{29}}$

$\boxed{d(P,\pi) \cong 4{,}27 \text{ u.c.}}$

4) Calcular a distância entre os planos paralelos

$\pi_1: x + y + z = 4$ e $\pi_2: 2x + 2y + 2z = 5$.

$\pi_1: x + y + z - 4 = 0$ e $\pi_2: 2x + 2y + 2z - 5 = 0$

1)


$(1,1,1) = k(2,2,2) \leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ 1 = 2k \\ 1 = 2k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = 1/2 \\ k = 1/2 \\ k = 1/2 \end{cases}$

1º) verificar se os vetores normais são paralelos.

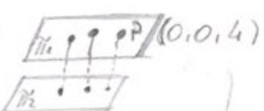
outra maneira: multiplicando uma delas por uma determinada constante e ver se são iguais. Por exemplo:

$\pi_1: x + y + z - 4 = 0 \quad \times(2)$

$\pi_1: 2x + 2y + 2z - 8 = 0$ e $\pi_2: 2x + 2y + 2z - 5 = 0$

Observem que os vetores são iguais mais os planos não são os mesmos, ou seja $\pi_1: d = -8$ e $\pi_2: d = -5$.

Então, se são paralelas qualquer distância entre os planos será sempre iguais



$d(P,\pi_2) = \dfrac{\|2(0)+2(0)+2(4)-5\|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \dfrac{\|8-5\|}{\sqrt{4+4+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{12}} \cong 0{,}87$

como obter:

Dar valores a x e y, p.e. $x=0$ e $y=0$ e determina z no plano escolhido, ou seja.

$2(0) + 2(0) + 2z - 8 = 0$

$0 + 0 + 2z - 8 = 0 \rightarrow 2z = 8 \rightarrow \boxed{z=4} \rightarrow$ depois calcula $d(P,\pi_2)$.