

Conceitos Matemáticos & Notações

Apêndice A: Notações

- $\Delta x, \delta x$: uma pequena mudança em x
- $\frac{\partial}{\partial t}$: a derivada parcial em relação a t mantendo as outras variáveis fixadas
- $\frac{d}{dt}$: a derivada no tempo de uma quantidade que é função apenas do tempo
- \dot{x} : derivada no tempo de x , $\frac{\partial x}{\partial t}$
- \ddot{x} : derivada no tempo de segunda ordem de x , $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$
- $\frac{D}{Dt}$: derivada material (de Lagrange), a taxa de variação de uma característica seguindo um elemento de fluido.

Abaixo, **negrito** indica os campos vetoriais, α é uma constante, e todas as outras variáveis são campos escalares. As componentes de um campo vetorial \mathbf{f} são indicadas como (f^x, f^y, f^z) . Em adição, utilizamos a convenção em ciências atmosféricas em que o vetor vento tridimensional $\mathbf{v} = (u, v, w)$ e o vetor vento horizontal $\mathbf{u} = (u, v)$, onde $u = \frac{dx}{dt}$ é o vento na direção leste-oeste local, $v = \frac{dy}{dt}$ é o vento na direção norte-sul local e $w = \frac{dz}{dt}$ é o vento na vertical local. Finalmente, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são vetores unitários locais na direção das coordenadas x, y, z , respectivamente.

Apêndice B: Cálculos Vetoriais

Operadores Vetoriais

Quantidades Úteis

Fórmulas Vetoriais

Abaixo, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ são campos vetoriais, ψ é um campo escalar e α é uma constante.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{B.2})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{B.3}$$

$$\nabla(\alpha\psi) = \alpha\nabla\psi \tag{B.4}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b} \tag{B.5}$$

$$\nabla \cdot (\psi\mathbf{a}) = \psi\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\psi \tag{B.6}$$

$$\nabla \times (\psi\mathbf{a}) = \nabla\psi \times \mathbf{a} + \psi\nabla \times \mathbf{a} \tag{B.7}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \tag{B.8}$$

$$\nabla \times (\nabla\psi) = 0 \tag{B.9}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a} \tag{B.10}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \tag{B.11}$$

Nome	Vetor/Escalar	Notação Vetorial	Expansão Cartesiana
Gradiente	vetor	∇	$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$
Laplaciano 2-D (escalar)	escalar	$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Divergente de um vetor	escalar	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$
Rotacional de um vetor 2-D	vetor	$\nabla \times \mathbf{u}$	$(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Rotacional de um vetor 3-D	vetor	$\nabla \times \mathbf{v}$	$(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\hat{\mathbf{i}} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\hat{\mathbf{j}} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Determinante Jacobiano 2-D	escalar	$J(\psi\zeta)$	$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$

Nome	Relação	Coordenadas Cartesiana
Vorticidade	$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$	$\boldsymbol{\omega} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\hat{\mathbf{i}} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\hat{\mathbf{j}} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Vorticidade na direção $\hat{\mathbf{k}}$	$\omega^z = \zeta = \nabla \times \mathbf{u}$	$\zeta = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\hat{\mathbf{k}}$
Função de corrente	$\psi, \nabla^2\psi = \zeta, \mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}} \times \nabla\psi$	$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

Apêndice C: Derivada Material

Derivada material 2-D de um campo escalar

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} \quad (\text{C.1})$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho \quad (\text{C.2})$$

É importante conhecer os operadores $\mathbf{v} \cdot \nabla()$ e $\mathbf{u} \cdot \nabla()$, pois são operadores de advecção em 3-D e 2-D, respectivamente.

Derivada material 3-D de um campo escalar

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (\text{C.4})$$

Derivada material 3-D de um campo vetorial

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} + u \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} + v \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} + w \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z} \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{f} \quad (\text{C.6})$$

e para uma particular componente de \mathbf{f}

$$\frac{Df^x}{Dt} = \frac{\partial f^x}{\partial t} + u \frac{\partial f^x}{\partial x} + v \frac{\partial f^x}{\partial y} + w \frac{\partial f^x}{\partial z} \quad (\text{C.7})$$

Forma Advectiva vs Fluxo

A forma do fluxo de uma quantidade pode ser escrita como:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{C.8})$$

A forma advectiva de uma quantidade pode ser escrita como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{C.9})$$

Usando B.6 e C.2, pode ser mostrado que a C.8 e C.9 são idênticos.

Apêndice D: Teoremas

Teorema da divergência (teorema de Gauss)

O teorema da divergência refere-se a integral da divergência de um campo vetorial \mathbf{a} sobre um volume V para o fluxo total do campo vetorial, para fora da superfície fechada A que circunda o volume V :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \iint_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{D.1})$$

onde \mathbf{a} é um campo vetorial arbitrário e \mathbf{n} é a unidade para fora normal à superfície A .

Teorema de Stokes

O teorema de Stokes é o "rotacional análogo" do teorema de Gauss. Ele relaciona a integral da componente normal de $\nabla \times \mathbf{a}$ sobre uma superfície aberta A para a integral de linha de \mathbf{a} em torno de uma superfície fechada A :

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{D.2})$$

Apêndice E: Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas

Coordenadas verticais generalizadas

Considere uma coordenada vertical geral r , que é assumido como sendo uma função monotônica de altura z . Se você desejar transformar as equações do movimento em um sistema de coordenadas (x, y, r, t) a partir de (x, y, z, t) , então $z = z(x, y, r, t)$ torna-se uma variável dependente. Qualquer função $A = A(x, y, z, t) = A(x, y, z(x, y, R, t), t)$ pode ser transformada em um novo sistema de coordenadas, onde as derivadas horizontal e de tempo se transformam como

$$\left. \frac{\partial A}{\partial s} \right|_r = \left. \frac{\partial A}{\partial s} \right|_z + \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_s \left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_r \quad (\text{E.1})$$

onde s denota x, y ou t e $|_a$ denota explicitamente uma diferencial com a mantido constante. A derivada parcial vertical de A resulta simplesmente da regra da cadeia. Isso é,

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial r}. \quad (\text{E.2})$$

O gradiente de A ao longo de uma superfície de r constante é, portanto,

$$\nabla_r A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \nabla_r z. \quad (\text{E.3})$$

É importante lembrar que as direções dos vetores unitários ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$) são iguais em ambos os sistemas de coordenadas r e z . Isto é, os eixos x e y estão sempre na posição horizontal e *não* são orientados ao longo de superfícies de r constante e o eixo vertical é ainda perpendicular à x e y .

Coordenadas curvilíneas gerais

A expressão métrica em coordenadas curvilíneas gerais x_1, x_2, x_3 é

$$(dl)^2 = (h_1 dx_1)^2 + (h_2 dx_2)^2 + (h_3 dx_3)^2, \quad (\text{E.4})$$

onde dl é um elemento de comprimento e h_1, h_2, h_3 são os coeficientes métricos. Seja $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ os vetores unitários locais na direção das coordenadas x_1, x_2, x_3 . O gradiente de um escalar p , o divergente e rotacional de um vetor \mathbf{v} (com componentes u, v, w) são então dados por

$$\nabla p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{h_1 \partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{h_2 \partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{h_3 \partial x_3}, \quad (\text{E.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 u)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 v)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 w)}{\partial x_3} \right], \quad (\text{E.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 w)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 v)}{\partial x_3} \right] + \frac{\mathbf{j}}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(h_1 u)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 w)}{\partial x_1} \right] + \frac{\mathbf{k}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 v)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u)}{\partial x_2} \right]. \quad (\text{E.7})$$

A fórmula (E.4) também pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i} & h_2 \mathbf{j} & h_3 \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 u & h_2 v & h_3 w \end{vmatrix}. \quad (\text{E.8})$$

Coordenadas cartesianas

Agora vamos aplicar essas fórmulas gerais em coordenadas cartesianas. A expressão métrica em coordenadas cartesianas é

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (\text{E.9})$$

que é obtida a partir de (E.1) usando $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ e usando a notação x, y, z no lugar de x_1, x_2, x_3 . Se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ denotam vetores unitários nas direções leste, norte e vertical, temos para o gradiente, divergência e rotacional

$$\nabla p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (\text{E.10})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (\text{E.11})$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (\text{E.12})$$

A fórmula (E.9) pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \quad (\text{E.13})$$

Coordenadas cilíndricas

Agora vamos aplicar as fórmulas gerais em coordenadas cilíndricas r, ϕ, z , onde r é o raio, ϕ é o ângulo tangencial, e z é a distância vertical. A expressão métrica em coordenadas cilíndricas é

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\phi)^2 + (dz)^2, \quad (\text{E.14})$$

que é obtida a partir de (E.1) usando $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$. Se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ denotam vetores unitários nas direções radial, tangencial e vertical, temos para o gradiente, divergência e rotacional

$$\nabla p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{r \partial \phi} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (\text{E.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial(ru)}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (\text{E.16})$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{r \partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial(rv)}{r \partial r} - \frac{\partial u}{r \partial \phi} \right). \quad (\text{E.17})$$

A fórmula (E.14) pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & r\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & rv & w \end{vmatrix}. \quad (\text{E.18})$$

Coordenadas esféricas

Agora vamos aplicar as fórmulas gerais em coordenadas esféricas λ , ϕ , r , onde λ é a longitude, ϕ é a latitude, e r é a distância do centro da Terra ao ponto em questão. A expressão métrica em coordenadas esféricas é

$$(dl)^2 = (r \cos \phi d\lambda)^2 + (rd\phi)^2 + (dr)^2, \quad (\text{E.19})$$

que é obtida a partir de (E.1) usando $h_1 = r \cos \phi$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. Se \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} denotam vetores unitários nas direções leste, norte e vertical, temos para o gradiente, divergência e rotacional

$$\nabla p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{r \cos \phi \partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{r \partial \phi} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (\text{E.20})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{r \cos \phi \partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \phi)}{r \cos \phi \partial \phi} + \frac{\partial (r^2 w)}{r^2 \partial r}, \quad (\text{E.21})$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{r \partial \phi} - \frac{\partial (rv)}{r \partial r} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial (ru)}{r \partial r} - \frac{\partial w}{r \cos \phi \partial \lambda} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{r \cos \phi \partial \lambda} - \frac{\partial (u \cos \phi)}{r \cos \phi \partial \phi} \right). \quad (\text{E.22})$$

A fórmula (E.19) pode ser escrita na forma de determinante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \begin{vmatrix} r \cos \phi \mathbf{i} & r \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial r} \\ u r \cos \phi & v r & w \end{vmatrix}. \quad (\text{E.23})$$