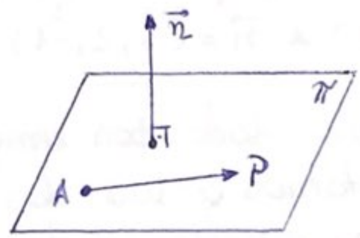
UNIDADE 5 - Plano

Equação Geral do Plano

Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq 0$, um vetor normal (ortogonal) ao plano.



Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\vec{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

ou

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

ou

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ou, ainda

$$ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0$$

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo

$$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d, \text{ obtemos}$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

↳ Equação geral do plano π.

Observações:

a) Assim como $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $k\vec{n}$, $k \neq 0$, é também vetor normal ao plano.

b) É importante notar que os três coeficientes a, b e c da equação geral do plano representam as componentes de um vetor normal ao plano.
Por exemplo, se o plano π é dado por $\pi: 3x + 2y - z + 1 = 0$, um de seus vetores normais é $\vec{n} = (3, 2, -1)$.

c) Para obter pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas das variáveis e calcular o valor da outra na equação dada.
Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4$ e $y = -2$, teremos:

$$3(4) + 2(-2) - z + 1 = 0 \rightarrow 12 - 4 - z + 1 = 0 \rightarrow z = 9$$

e, portanto, o ponto $A = (4, -2, 9)$ pertence a este plano.

Exemplo: obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal.

Como $\vec{n}$ é normal a π, sua equação é do tipo
$3x + 2y - 4z + d = 0$

e sendo A um ponto do plano, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é:
$$3(2) + 2(-1) - 4(3) + d = 0 \rightarrow 6 - 2 - 12 + d = 0 \rightarrow \boxed{d = 8}$$

Logo, uma equação geral do plano π é:

$$\boxed{3x + 2y - 4z + 8 = 0}$$

Exemplo: Escrever uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano,

Não fazer

$\pi_1 : 3x - 4y - 2z + 5 = 0.$

Então, como $\pi \parallel \pi_1$, o vetor $\vec{n}_1 = (3, -4, -2)$ normal a π_1 é também normal a π. Logo, uma equação de π é da forma

$$3x - 4y - 2z + d = 0$$

Tendo em vista que $A \in \pi$, suas coordenadas devem verificar a equação:

$$3(2) - 4(1) - 2(3) + d = 0 \rightarrow 6 - 4 - 6 + d = 0 \rightarrow \boxed{d = 4}$$

Portanto, uma equação de π é:

$$\boxed{3x - 4y - 2z + 4 = 0}$$

Exemplo: A reta

$$r : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

, é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto $A = (2, 1, -2)$. Determine uma equação geral de π e represente graficamente.

Como $r \perp \pi$, qualquer vetor diretor de r é um vetor normal ao plano. Sendo $\vec{n} = (3, 2, 1)$ um destes vetores, uma equação de π é da forma:

$$3x + 2y + z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, deve-se ter $3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0 \rightarrow 6 + 2 - 2 + d = 0$

$\rightarrow \boxed{d = -6}$

Portanto, uma equação de π é: $\boxed{3x + 2y + z - 6 = 0}$

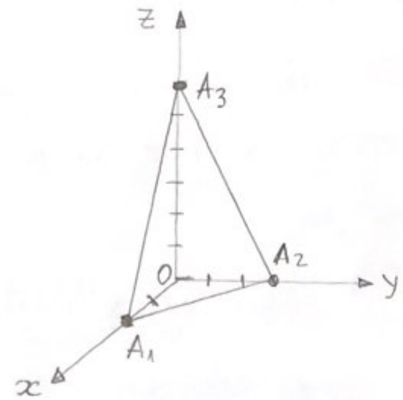
Para a representação gráfica do plano, obtenemos três de seus pontos. Se nesta equação fizermos:

$y = 0$ e $z = 0 \longrightarrow x = 2$

$x = 0$ e $z = 0 \longrightarrow y = 3$

$x = 0$ e $y = 0 \longrightarrow z = 6$

Obtemos, assim, os pontos $A_1 = (2,0,0)$, $A_2 = (0,3,0)$ e $A_3 = (0,0,6)$ nos quais o plano intercepta os eixos coordenados.



Observação:

Se um plano π intercepta os eixos coordenados nos pontos $(p,0,0)$, $(0,q,0)$ e $(0,0,r)$ com $p \cdot q \cdot r \neq 0$, então π admite a equação: $\boxed{\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} + \dfrac{z}{r} = 1}$ denominada equação segmentária do plano π.

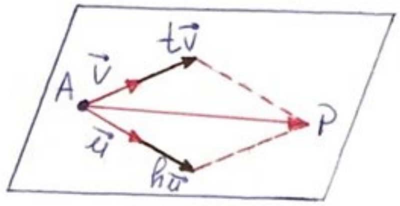
Por exemplo: para o caso do problema anterior, onde estes pontos são $A_1 = (2,0,0)$, $A_2 = (0,3,0)$ e $A_3 = (0,0,6)$, a equação segmentária do plano é:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$$

o que é equivalente à equação $3x + 2y + z - 6 = 0$, ao eliminarmos os denominadores e ordenarmos os termos.

Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano

Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π, porém, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-paralelos.



Para todo ponto P do plano, os vetores $\vec{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, existem números reais h e t tais que:

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), \quad h, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é denominada equação vetorial do plano π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π.

Da equação vetorial obtém-se:

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1h + a_2t,\ y_0 + b_1h + b_2t,\ z_0 + c_1h + c_2t)$$

que, pela condição de igualdade, fica:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t, \quad h, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Estas equações são chamadas de equações paramétricas de π e h e t são variáveis auxiliares denominadas parâmetros.

Exemplo: Seja o plano π que passa pelo ponto $A = (2, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

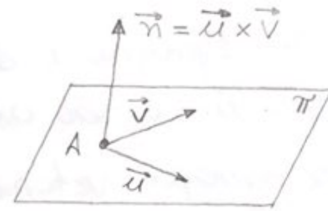
1) Eq. vetorial: $(x, y, z) = (2, 2, -1) + h(2, -3, 1) + t(-1, 5, -3)$

2) Eqs. Paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 + 2h - t \\ y = 2 - 3h + 5t \\ z = -1 + h - 3t \end{cases}$$

3) Eq. Geral:

como o vetor $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5, 7)$

e simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ele é um vetor $\vec{n}$ normal ao plano π.



Então, uma equação geral de π é da forma: $4x + 5y + 7z + d = 0$

e, como $A \in \pi$ tem-se

$$4(2) + 5(2) + 7(-1) + d = 0$$
$$8 + 10 - 7 + d = 0$$
$$\boxed{d = -11}$$

Portanto, $4x + 5y + 7z - 11 = 0$ é uma equação geral de π.

Exemplo: Dado o plano π determinado pelos pontos $A=(1,-1,2)$, $B=(2,1,-3)$ e $C=(-1,-2,6)$, obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

(*) Não Fazer

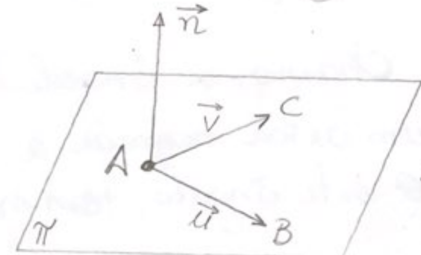
1) Eqs. paramétricas:

Sabe-se que existe apenas um plano que contém três pontos não em linha reta. Os vetores não-paralelos

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-5)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,-1,4)$

são vetores diretores de π e, portanto, as equações (utilizando o ponto A)

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = -1 + 2h - t \\ z = 2 - 5h + 4t \end{cases}$$



são equações paramétricas do plano.

2) Eq. Geral:

Como no exemplo anterior, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π, o vetor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (3,6,3)$$

é um vetor normal a π.

Então, uma eq. geral é da forma: $3x + 6y + 3z + d = 0$.

Como $A \in \pi$ (poderíamos tomar B ou C):

$$3(1) + 6(-1) + 3(2) + d = 0$$

$$3 - 6 + 6 + d = 0$$

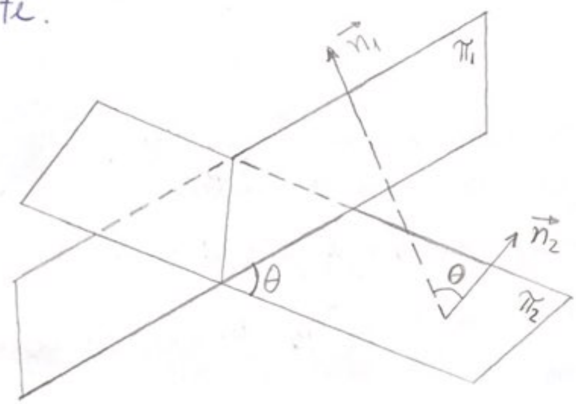
$$\boxed{d = -3}$$

Portanto, a equação geral de π é:

$$3x + 6y + 3z - 3 = 0$$

Ângulo de dois planos

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente.



Chama-se ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2. Sendo θ este ângulo, tem-se:

$$\cos\theta = \frac{\|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|} \quad \text{com } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Como $\cos\theta \ge 0$ quando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, o numerador deve ser positivo, razão pela qual o produto escalar em módulo, pois este poderá ser negativo quando o ângulo entre os vetores for o suplementar de θ.

Exemplo: Determinar o ângulo entre os planos $\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0$ e $\pi_2: x + y - 4 = 0$.

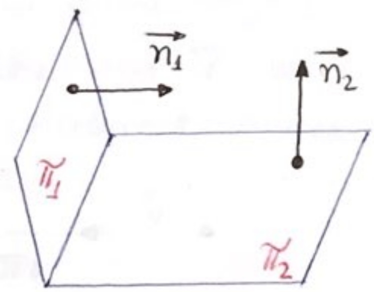
Sendo $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$ vetores normais a π_1 e π_2, de acordo com eq. do ângulo de dois pontos, tem-se:

$$\cos\theta = \frac{\|(2,1,-1)\cdot(1,1,0)\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\,\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{\|2+1+0\|}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$

$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{12}}{4}, \text{ logo } \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right) \rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}$$

Planos Perpendiculares

Consideremos dois planos π_1 e π_2, e sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Pela figura conclui-se imediatamente:



$$\pi_1 \perp \pi_2 \leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Exemplo: Verificar se π_1 e π_2 são planos perpendiculares:

a) $\pi_1: 3x + y - 4z + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 6y + 3z = 0$

b) $\pi_1: x + y - 4 = 0$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

a) Sendo $\vec{n}_1 = (3, 1, -4)$ e $\vec{n}_2 = (2, 6, 3)$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente, e como

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3(2) + 1(6) - 4(3) = 6 + 6 - 12 = 12 - 12 = 0$$

conclui-se que π_1 e π_2 são perpendiculares.

b) O vetor $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ é um vetor normal a π_1. Teremos que encontrar um vetor $\vec{n}_2$ normal a π_2. Como $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$ são vetores diretores de π_2, podemos considerar

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -3)$$

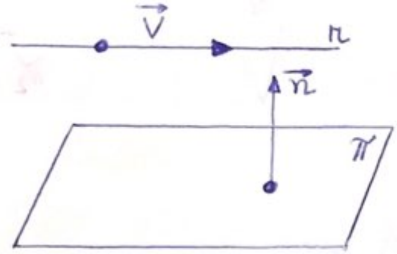
Tendo em vista que:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, 1, 0) \cdot (1, 1, -3) = 1(1) + 1(1) + 0(-3) = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 0$$

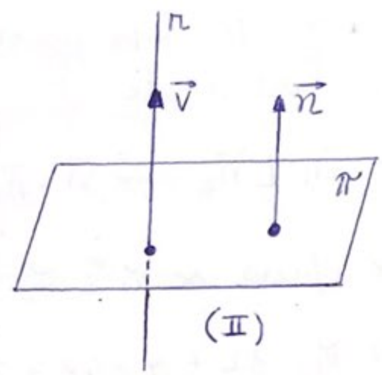
os planos π_1 e π_2 não são perpendiculares.

Paralelismo e Perpendicularismo entre Reta e Plano

Sejam uma reta r com direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π. Pelas figuras abaixo conclui-se imediatamente:



(I)



(II)

(I) $r \parallel \pi \leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

(II) $r \perp \pi \leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n} \leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{n}$

Exemplo: A reta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$ é paralela ao plano

$\pi: 5x + 2y - 4z - 1 = 0$ pois o vetor diretor $\vec{v} = (2,-3,1)$ de r é ortogonal ao vetor normal $\vec{n} = (5,2,-4)$ de π, isto é,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2,-3,1) \cdot (5,2,-4) = 2(5) - 3(2) + 1(-4) = 10 - 6 - 4 = 0$$

Esta mesma reta, por sua vez, é perpendicular ao plano $\pi_1: 4x - 6y + 2z - 5 = 0$, pois o vetor diretor $\vec{v} = (2,-3,1)$ de r é paralelo ao vetor normal $\vec{n}_1 = (4,-6,2)$ de π_1, isto é,

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{n}_1$$

ou de modo equivalente,

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$