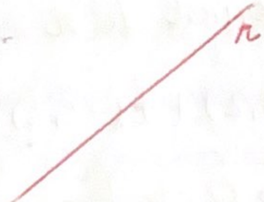
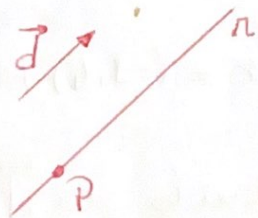
UNIDADE 4 - Reta

Equações da Reta

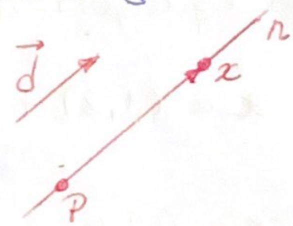
- Considere uma reta r. Desejamos determinar uma forma algébrica de representar essa reta.



- Seja P um ponto r e $\vec{d}$ um vetor com a mesma direção de r.



- Para que um ponto x pertença a r, note que $\overrightarrow{Px}$ deve ter a mesma direção de $\vec{d}$.



- Sendo assim, existe um escalar t tal que $\overrightarrow{Px} = t\vec{d}$.

$$\overrightarrow{Px} \rightarrow x - P = t\vec{d} \rightarrow \boxed{x = P + t\vec{d}}.$$

↳ Equação vetorial da reta.

<u>Obs</u>: • O escalar t é chamado de parâmetro. → Varia de $-\infty$ a $+\infty$

• A equação vetorial tem o mesmo formato, não importando se a reta está no plano ou no espaço.

Exemplo: Seja a reta r que passa pelos pontos $P=(1,2)$ e $Q=(-1,4)$. Determine a equação vetorial de r.

1:) Lembre-se: p/ determinar uma eq. vetorial precisamos de um ponto e um vetor diretor.

Note que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ terá a mesma direção da reta r. Podemos então tomar $\overrightarrow{PQ}$ como um vetor diretor dessa reta.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,4) - (1,2) = (-2,2).$$

Desse modo, uma equação vetorial de r será dada por:

$$x = P + t\overrightarrow{PQ} \longrightarrow x = (1,2) + t(-2,2).$$

Observação: Usando o ponto Q, podemos determinar outra equação vetorial de r:

$$x = Q + t\overrightarrow{PQ} \longrightarrow x = (-1,4) + t(-2,2).$$

Por outro lado, considerando que $\vec{d} = (-1,1)$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{PQ} = (-2,2)$ (já que $\vec{d} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{2}$), também podemos determinar outras duas equações vetoriais para r:

$$x = P + t\vec{d} \longrightarrow x = (1,2) + t(-1,1).$$

$$x = Q + t\vec{d} \longrightarrow x = (-1,4) + t(-1,1).$$

* Outra forma de representar algebricamente os pontos de uma reta.

- considerando que $x = (x,y)$, $P = (x_0, y_0)$ e $\vec{d} = (a,b)$, podemos escrever:

$$(x,y) = (x_0, y_0) + t(a,b).$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$ conhecidas como eqs. paramétricas

Definição: Equações paramétricas no plano

- Seja $P=(x_0, y_0)$ um ponto da reta r e $\vec{d}=(a,b)$ um vetor com a mesma direção r. As equações paramétricas da reta r são definidas como:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$

Definição: Equações paramêtricas no espaço

- Seja $P=(x_0, y_0, z_0)$ um ponto da reta r e $\vec{d}=(a,b,c)$ um vetor com a mesma direção de r. As equações paramêtricas da reta r são definidas como:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

- Considerando que a, b e c são diferentes de zero, isolando o parâmetro t em cada equação, temos que:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = t \\ \dfrac{y-y_0}{b} = t \\ \dfrac{z-z_0}{c} = t \end{cases}$$

- Sendo assim, podemos dizer que:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

→ sendo, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

↳ Equação na forma simétrica

Equação cartesiana

- A equação na forma simétrica da reta que passa pelo ponto $P=(x_0, y_0)$ e que tem a mesma direção do vetor $\vec{d}=(p,q)$ (com $p\neq 0$ e $q\neq 0$), possui o formato:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}.$$

Desenvolvendo essa equação, temos que:

$$q(x-x_0)=p(y-y_0)$$

$$qx-qx_0=py-py_0$$

$$qx-py-qx_0+py_0=0$$

Lembrando que: x_0, y_0, p e q são valores conhecidos, chamando $a=q$, $b=-p$ e $c=-qx_0+py_0$, podemos dizer que:

$$\boxed{ax+by+c=0}.$$

↳ equação cartesiana

Exemplo: Qual a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P = (3,0,-5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v_r} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$?

R: A equação vetorial da reta é: $(x,y,z) = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\text{relação c/ ponto}} + t \underbrace{(a,b,c)}_{\text{relação c/ vetor}}$

Logo, $(x,y,z) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$

Agora, determine um ponto qualquer da reta e verifique se $P = (7,4,-7)$ pertence a r.

Para achar um ponto qualquer, $t = 1$ por exemplo:

$(x,y,z) = (3,0,-5) + 1\cdot(2,2,-1) = (3,0,-5) + (2,2,-1) = \boxed{(5,2,-6)}$

Para verificar se P pertence a r, basta encontrar o parâmetro t.

$$\begin{cases} P = (7,4,-7) \\ P_0 = (3,0,-5) \\ \vec{v_r} = (2,2,-1) \end{cases}$$

então: $(7,4,-7) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$

$(7,4,-7) - (3,0,-5) = t(2,2,-1)$

$(4,4,-2) = (2t, 2t, -t)$

$4 = 2t \rightarrow t = 4/2 \rightarrow \boxed{t = 2}$

$4 = 2t \rightarrow t = 4/2 \rightarrow \boxed{t = 2}$

$-2 = -t \rightarrow \boxed{t = 2}$

Portanto, o ponto P pertence à reta r, visto que o parâmetro t é o mesmo.

→ Verificando se $P = (7,4,-7)$ pertence a r:

$(7,4,-7) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$

$(7,4,-7) = (3,0,-5) + 2\cdot(2,2,-1)$

$(7,4,-7) = (3,0,-5) + (4,4,-2)$

$\boxed{(7,4,-7) = (7,4,-7)}$ Verdadeiro!

Exemplo 1: A reta r que passa pelo ponto $A=(3,-4,2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(2,1,-3)$, tem equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -4+t \\ z = 2-3t \end{cases}$$

Exemplo 2: Dado o ponto $A=(2,3,-4)$ e o vetor $\vec{v}=(1,-2,3)$, pede-se:

(a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

(b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros $t=1$ e $t=4$, respectivamente.

(c) Determinar o ponto r cuja abscissa é 4

(d) Verificar se os pontos $D=(4,-1,2)$ e $E=(5,-4,3)$ pertencem.

(e) Determinar para que valores de m e n o ponto $F=(m,5,n)$ pertence a r.

(f) Escrever outros dois sistemas de equações paramétricas de r.

(g) Escrever equações paramétricas da reta s que passa por $G=(5,2,-4)$ e é paralela a r.

(h) Escrever equações paramétricas da reta t que passa por A e é paralela ao eixo dos y.

R)

(a)
$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \\ z = -4+3t \end{cases}$$

(b) Das equações acima tem-se:

• P/ $t=1$ vem
$$\begin{cases} x = 2+(1) = 3 \\ y = 3-2(1) = 1 \\ z = -4+3(1) = -1 \end{cases}$$

$\therefore B=(3,1,-1) \in r$

• P/ $t=4$ vem
$$\begin{cases} x = 2+(4) = 6 \\ y = 3-2(4) = -5 \\ z = -4+3(4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore C=(6,-5,8) \in r$

Exemplo: Qual a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P=(3,0,-5)$ e tem a direção do vetor $\vec{V_r} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$?

R: A equação vetorial da reta é: $(x,y,z) = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\text{relação c/ ponto}} + t \underbrace{(a,b,c)}_{\text{relação c/ vetor}}$

Logo, $(x,y,z) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$

Agora, determine um ponto qualquer da reta e verifique se $P=(7,4,-7)$ pertence a r.

Para achar um ponto qualquer, $t=1$ por exemplo:

$(x,y,z) = (3,0,-5) + 1\cdot(2,2,-1) = (3,0,-5) + (2,2,-1) = \boxed{(5,2,-6)}$

Para verificar se P pertence a r, basta encontrar o parâmetro t.

$$\begin{cases} P=(7,4,-7) \\ P_0 = (3,0,-5) \\ \vec{V_r} = (2,2,-1) \end{cases}$$

então: $(7,4,-7) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$

$(7,4,-7) - (3,0,-5) = t(2,2,-1)$

$(4,4,-2) = (2t, 2t, -t)$

$4 = 2t \rightarrow t = 4/2 \rightarrow \boxed{t=2}$

$4 = 2t \rightarrow t = 4/2 \rightarrow \boxed{t=2}$

$-2 = -t \rightarrow \boxed{t=2}$

Portanto, o ponto P pertence à reta r, visto que o parâmetro t é o mesmo.

→ Verificando se $P=(7,4,-7)$ pertence a r:

$(7,4,-7) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$

$(7,4,-7) = (3,0,-5) + 2\cdot(2,2,-1)$

$(7,4,-7) = (3,0,-5) + (4,4,-2)$

$\boxed{(7,4,-7) = (7,4,-7)}$ Verdadeiro!

(c) Como o ponto tem abscissa 4 ($x = 4$), temos

$4 = 2 + t$ (1ª eq. de r) e, portanto, $t = 2$.

Como, $t = 2 \rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2, \end{cases}$

logo, o ponto procurado é: $(4, -1, 2)$.

(d) Um ponto pertence à reta r se existe um real t que satisfaz as equações de r.

• P/ $D = (4, -1, 2)$ as equações $\begin{cases} 4 = 2 + t \rightarrow t = 2 \\ -1 = 3 - 2t \rightarrow t = 2 \\ 2 = -4 + 3t \rightarrow t = 2 \end{cases}$

Portanto, $D \in r$.

• P/ $E = (5, -4, -3)$ as equações $\begin{cases} 5 = 2 + t \rightarrow t = 3 \\ -4 = 3 - 2t \rightarrow t = 7/2 \\ -3 = -4 + 3t \rightarrow t = 1/3 \end{cases}$

Portanto, $E \notin r$, pois não são satisfeitas para o mesmo valor de t. Por exemplo, $t = 3$ satisfaz a primeira eq. mas não as outras duas.

(e) Como $F \in r$, as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases}$$

, se verificam para algum real t.

Da equação $5 = 3 - 2t$, vem que $\boxed{t = -1}$ e, portanto,

$m = 2 + (-1) = 1$

$n = -4 + 3(-1) = -7$.

(f) tomando o ponto $B = (3, 1, -1) \in r$ (item b) e o vetor diretor $2\vec{v} = 2(1, -2, 3) = (2, -4, 6)$, tem-se:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

Para o ponto $C = (6, -5, 8)$ e o vetor diretor $-\vec{v} = (-1, 2, -3)$, tem-se:

$$r: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = -5 + 2t \\ z = 8 - 3t \end{cases}$$

(g) Como $s \parallel r$, os vetores diretores de s são os mesmos de r.

Para $\vec{v} = (1, -2, 3)$, tem-se:

$$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

(h) Como a reta t é paralela ao eixo dos y, um de seus vetores diretores é $\vec{j} = (0, 1, 0)$

$$t: \begin{cases} x = 2 + (0) \cdot t = 2 \\ y = 3 + (1) \cdot t = 3 + t \\ z = -4 + (0) t = -4 \end{cases}$$

Exemplo 3: A reta que passa pelo ponto $A=(3,0,-5)$ e tem direção do vetor $\vec{v}=(2,2,-1)$, tem quais equações simétricas?

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\begin{cases} A=(3,0,-5) \quad (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v}=(2,2,-1) \quad (a, b, c) \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-0}{2}=\frac{z+5}{-1}$$

$$\rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{-1}$$

Obs: se desejarmos obter outros pontos da reta, basta atribuir um valor qualquer a uma das variáveis. Por exemplo, para $x=5$, tem-se:

$$\frac{5-3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{-1} \rightarrow 1=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{-1}$$

onde $y=2$ e $z=-6$ e, portanto, o ponto $(5,2,-6)$ pertence à reta.

Equações Reduzidas da Reta

Em vez de realizar um tratamento genérico, tomaremos um caso particular.

Seja a reta r definida pelo ponto $A=(2,-4,-3)$ e pelo vetor diretor $\vec{v}=(1,2,-3)$ e expressa pelas equações simétricas

$$r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+3}{-3} \quad \text{(ERR)}$$

A partir destas equações pode-se expressar duas variáveis em função da terceira. Isolando, primeiramente, as variáveis y e z e expressando-as em função de x, obtém-se:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2}$$

$$1(y+4) = 2(x-2)$$

$$y+4 = 2x-4$$

$$\boxed{y = 2x-8}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{z+3}{-3}$$

$$1(z+3) = -3(x-2)$$

$$z+3 = -3x+6$$

$$\boxed{z = -3x+3}$$

Essas duas equações são equações reduzidas da reta r, na variável x.

<u>Observações</u>:
- É fácil verificar que todo ponto $P \in r$ é do tipo $P=(x, 2x-8, -3x+3)$, onde x pode assumir um valor qualquer. P. ex., para $x=3$ tem-se o ponto $P_1 = (3,-2,-6) \in r$.

- Equações reduzidas na variável x serão sempre da forma: $\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$

- De forma idêntica, pode-se obter as equações reduzidas:

  – Na variável y $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 4 \\ z = -\frac{3}{2}y - 9 \end{cases}$

  – Na variável z $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}z + 1 \\ y = -\frac{2}{3}z - 6 \end{cases}$

- A reta r das equações (ERR) pode ser representada pelas equações paramétricas
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

Da primeira equação obtém-se $t = x - 2$ que, substituindo nas outras duas as transforma em

$$y = -4 + 2(x-2) = 2x - 8$$
$$z = -3 - 3(x-2) = -3x + 3$$

Até aqui! → que são as equações reduzidas obtidas anteriormente.

- Para encontrar um vetor diretor da reta

$$r: \begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = -3x + 3 \end{cases}$$

uma das formas é determinar dois pontos A e B de r e, posteriormente, encontrar o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$. Por exemplo,

- para $x = 0$, obtém-se o ponto $A = (0, -8, 3)$ e
- para $x = 1$, obtém-se o ponto $B = (1, -6, 0)$.

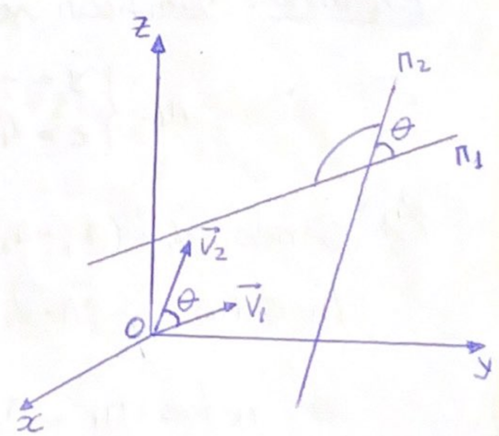
Logo, $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$ é um vetor diretor de r.

Outra maneira seria isolar a variável x nas duas equações, obtendo-se desse modo equações simétricas de r:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

onde a leitura do vetor diretor é imediata $(1, 2, -3)$.

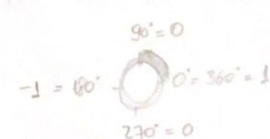
Ângulo de duas retas



Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se:

$$\cos\theta = \frac{\|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

90°



Exemplo: Calcular o ângulo entre retas.

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad e \quad r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

R/ Os vetores que definem as direções das retas r_1 e r_2 são, respectivamente,

$\vec{v_1} = (1, 1, -2)$ e $\vec{v_2} = (-2, 1, 1)$, Assim:

$$\cos\theta = \frac{\|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}\|}{\|\vec{v_1}\| \|\vec{v_2}\|} = \frac{\|(1,1,-2)\cdot(-2,1,1)\|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(1)^2+1^2}}$$

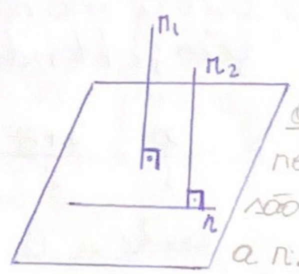
$$\cos\theta = \frac{\|-2+1-2\|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{\|-3\|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

Retas Ortogonais

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, respectivamente.

Então, $r_1 \perp r_2 \longleftrightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$



Obs: As retas r_1 e r_2 são ortogonais a r.

Exemplo: Verificar se as retas abaixo são ortogonais.

$$r_1: \begin{cases} y = -4x + 1 \\ z = 4x \end{cases} \quad e \quad r_2: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$

R/ Sendo $\vec{v_1} = (0, -4, 4)$ e $\vec{v_2} = (-2, 1, 1)$ vetores diretores de r_1 e r_2 e $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0(-2) - 4(1) + 4(1) = 0$,

as retas r_1 e r_2 são ortogonais

Reta Ortogonal a duas Retas

Sejam as retas r_1 e r_2 não-paralelas, com direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Toda reta r ao mesmo tempo ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$ tal que:

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{v}_2 = 0 \end{cases}$$

Em vez de tomarmos um vetor $\vec{v} \neq 0$ como uma solução particular do sistema (eq. acima), poderíamos utilizar o produto vetorial, isto é:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Definido o vetor diretor, a reta r estará determinada quando for conhecido um de seus pontos.

Exemplo: Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, 4, -1)$ e é ortogonal às retas

$$r_1: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 3, -4) \quad e \quad r_2: \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

R/ As direções de r_1 e r_2 são definidas pelos vetores $\vec{v}_1 = (2, 3, -4)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. Então, a reta r tem a direção do vetor

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3+4)\hat{i} + (0+2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1, 2, 2)}$$

Logo, tem-se:

$$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$