DISCIPLINA: Geometria Analítica - METR061
Prof.: Helber B. Gomes

Unidade 3 - Produtos Escalar e vetorial

Produto escalar

- Definição: O produto escalar $(\cdot)$ entre dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ é definido como o somatório dos produtos de suas coordenadas, isto é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{k=1}^{n} u_i \cdot v_j$$

Obs: O produto escalar entre dois vetores também pode ser:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Exemplo: Determine o produto escalar entre os vetores:

$$\vec{u} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k} \quad e \quad \vec{v} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}.$$

R/ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{(5 \cdot 2)}_{\hat{i}} + \underbrace{(3 \cdot (-4))}_{\hat{j}} + \underbrace{((-8) \cdot (-1))}_{\hat{k}}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 10 + (-12) + (8) = 10 - 12 + 8 = 6$$

Propriedades: Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(c) $\alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v}$

(d) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$, se $\vec{u} \neq \vec{0}$

(e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, se $\vec{u} = \vec{0}$

(f) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

* Desigualdades: Cauchy-Schwarz e Triangular

→ Cauchy-Schwarz: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

→ Triangular: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exemplo: Dado os vetores $\vec{u} = (1,0,2)$ e $\vec{v} = (3,-2,-1)$, prove as desigualdades de Cauchy-Schawarz e triangular.

1) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |(1,0,2) \cdot (3,-2,-1)| = |3 + 0 + (-2)| = |3-2| = 1$

$\|\vec{u}\| = \|(1,0,2)\| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} = 2{,}23$

$\|\vec{v}\| = \|(3,-2,-1)\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} = 3{,}741$

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \rightarrow 1 \leq 2{,}23 \cdot 3{,}741 \rightarrow \boxed{1 \leq 8{,}34}$ OK

2) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|(1,0,2) + (3,-2,-1)\| = \|(3+1, 0-2, 2-1)\| = \|(4,-2,1)\|$

$\|(4,-2,1)\| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21} = 4{,}58$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \rightarrow 4{,}58 \leq 2{,}23 + 3{,}74 \rightarrow \boxed{4{,}58 \leq 5{,}97}$ OK

Exemplo: Dado os vetores $\vec{u} = (1,-1,2)$ e $\vec{v} = (3,1,2)$ prove:
$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|(1,-1,2) + (3,1,2)\| = \|1+3, -1+1, 2+2\| = \|(4,0,4)\|$

$\|(4,0,4)\| = \sqrt{(4)^2 + 0^2 + (4)^2} = \sqrt{16+0+16} = \sqrt{32} = 5{,}65$

$\|\vec{u}\| = \|(1,-1,2)\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \cong 2{,}45$

$\|\vec{v}\| = \|(3,1,2)\| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \cong 3{,}74$

Assim,

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \rightarrow 5{,}65 \leq 2{,}45 + 3{,}74 \rightarrow \boxed{5{,}65 \leq 6{,}19}$ OK

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (3,1,2)$ e $\vec{w} = (-1,4,0)$, verifique por produto escalar se:

a) $\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}}_{1^{\circ}} \neq \underbrace{\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})}_{2^{\circ}}$

1º) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,-1,2)\cdot(3,1,2) = [(1\cdot3)+(-1\cdot1)+(2\cdot2)] = (3-1+4) = 6$

Assim, $6\cdot(-1,4,0) = \boxed{(-6,24,0)}$

2º) $\vec{v}\cdot\vec{w} = (3,1,2)\cdot(-1,4,0) = [(3\cdot(-1)) + (1\cdot4) + (2\cdot0)] = (-3+4+0) = 1$

Assim, $1\cdot(1,-1,2) = \boxed{(1,-1,2)}$

Desta forma, $\boxed{(-6,24,0) \neq (1,-1,2)}$

b) $\underbrace{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})}_{1^{\circ}} = \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{2^{\circ}} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{w})}_{3^{\circ}}$

1º) $(1,-1,2)\cdot[(3,1,2)+(-1,4,0)] = (1,-1,2)\cdot[(3-1,\ 1+4,\ 2+0)] =$
$= (1,-1,2)\cdot(2,5,2) = [(1\cdot2)+(-1\cdot5)+(2\cdot2)] = (2-5+4) = 1$

2º) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,-1,2)\cdot(3,1,2) = (1\cdot3)+(-1\cdot1)+(2\cdot2) = 3-1+4 = 6$

3º) $\vec{u}\cdot\vec{w} = (1,-1,2)\cdot(-1,4,0) = (1\cdot(-1)) + ((-1)\cdot4) + (2\cdot0) = -1-4+0 = -5$

Somando 2º e 3º, temos: $6-5 = 1$

Assim, $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{u}\cdot\vec{w})$

$\boxed{1 = 1}$ OK

* Vetores ortogonais $(\vec{u}\perp\vec{v})$

- Dois vetores são ortogonais se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Exemplo: $\vec{u} = (-3, 0, 4)$ e $\vec{v} = (5, 1, 6)$ são ortogonais?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 0, 4) \cdot (5, 1, 6) = -15 + 0 + 24 = 9$$

Logo, não são ortogonais.

Exemplo: $\vec{u} = (1, 0, -4)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$ são ortogonais?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 0, -4) \cdot (4, 3, 1) = 4 + 0 - 4 = 0 \quad \underline{OK}$$

Produto vetorial

- Dados dois vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, definimos o produto vetorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ entre estes vetores como sendo o determinante dado por:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\hat{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\hat{k}$$

Exemplo: Dado os vetores $\vec{u} = (5, 4, -3)$ e $\vec{v} = (1, 0, -1)$, determine o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [4 \cdot (-1) - (-3) \cdot 0]\hat{i} + [(-3) \cdot 1 - (-1) \cdot 5]\hat{j} + [5 \cdot 0 - 1 \cdot (4)]\hat{k} =$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = [-4 + 0]\hat{i} + [-3 + 5]\hat{j} + [0 - 4]\hat{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = (-4, 2, -4)$$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 3, 1)$, determine um vetor $\vec{w}$ que seja ao mesmo tempo ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Sabemos que um possível vetor $\vec{w}$ é dado por:

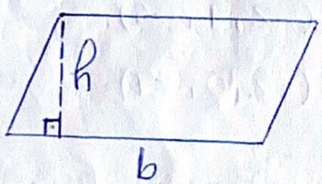
$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 1 - 3\cdot(-1))\hat{i} + ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 1)\hat{j} + (1\cdot 3 - 2\cdot 2)\hat{k}$$

$$\vec{w} = (2+3)\hat{i} + (-2-1)\hat{j} + (3-4)\hat{k} \rightarrow \vec{w} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$

Portanto, o vetor $\vec{w} = (5, -3, -1)$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao mesmo tempo.

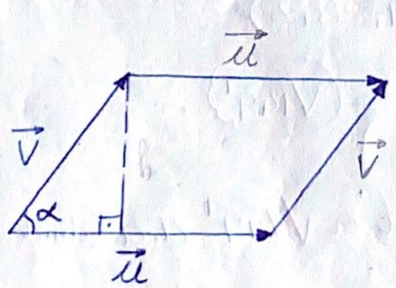
* Área do paralelogramo:

- Sabemos que a área A de um paralelogramo de altura $\underline{h}$ e base $\underline{b}$ é dada por: $A = b \cdot h$.



- Vamos considerar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representam os lados do paralelogramo. Note que a sua base será $\|\vec{u}\|$ e a sua altura será $\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\alpha$. Portanto, a área desse paralelogramo será:

$$A = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\alpha = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

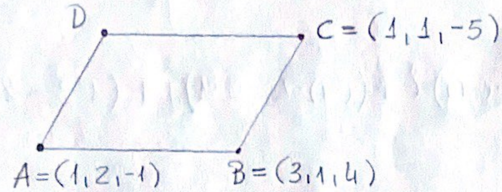


$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto } (h)}{\text{hipotenusa } (\|\vec{v}\|)}$

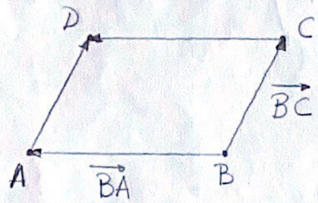
$h = \vec{v} \operatorname{sen}\alpha$

Exemplo: O paralelogramo ABCD é tal que $A=(1,2,-1)$, $B=(3,1,4)$ e $C=(1,1,-5)$. Determine a área desse paralelogramo.

A figura abaixo ilustra o paralelogramo ABCD.



A área de ABCD será igual a $\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\|$.



Temos então que:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,2,-1) - (3,1,4) = (-2,1,-5)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,1,-5) - (3,1,4) = (-2,0,-9)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \big(1\cdot(-9) - 0\cdot(-5)\big)\hat{i} + \big((-5)\cdot(-2) - (-9)\cdot(-2)\big)\hat{j} + \big((-2)\cdot 0 - (-2)\cdot 1\big)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (-9+0)\hat{i} + (10-18)\hat{j} + (0+2)\hat{k}$$

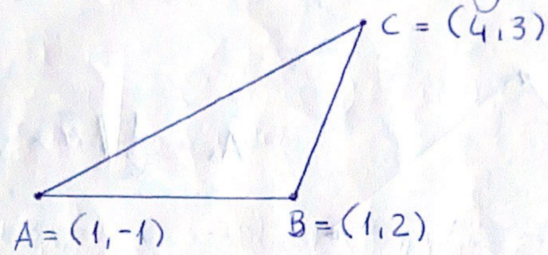
$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = -9\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k} = (-9,-8,2)$$

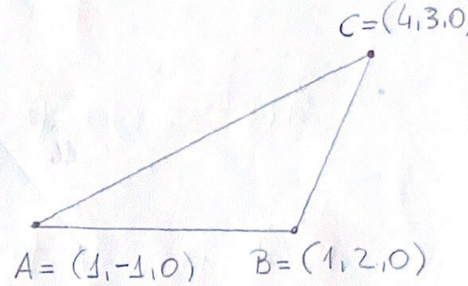
$$\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-9)^2 + (-8)^2 + (2)^2} = \sqrt{149}$$

Portanto, a área ABCD é igual a $\sqrt{149}$ u.a (Unidade de área)

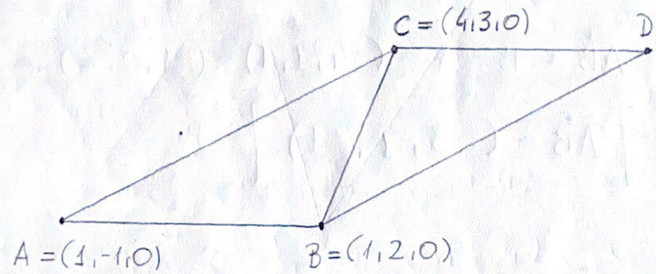
Exemplo: Calcule a área do triângulo ABC, tal que $A = (1, -1)$, $B = (1, 2)$ e $C = (4, 3)$.

A figura abaixo ilustra o triângulo ABC.

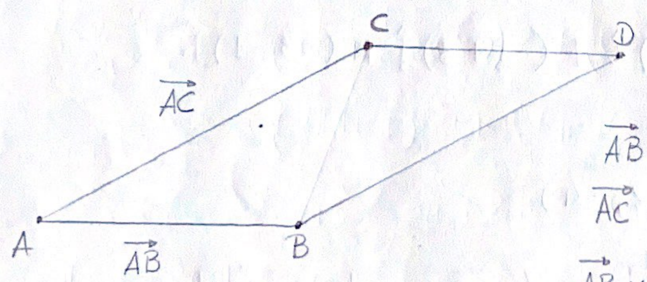




A partir de ABC podemos criar o paralelogramo ABCD como ilustra a figura abaixo.



A área de ABC será igual a $\frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|$.



Temos que:

$\vec{AB} = B - A = (1, 2, 0) - (1, -1, 0) = (0, 3, 0)$

$\vec{AC} = C - A = (4, 3, 0) - (1, -1, 0) = (3, 4, 0)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 9\hat{k}$$

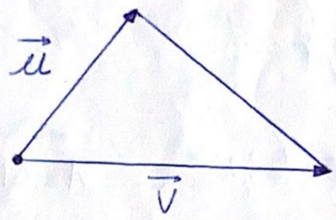
$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, -9)$

$\| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-9)^2} = 9$

Portanto, a área ABC é igual a $\frac{9}{2}$ u.a. (unidade de área).

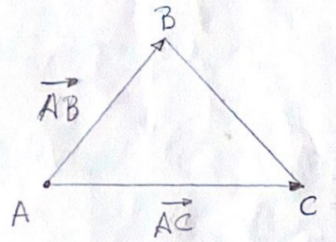
* Área do triângulo:

- A área de um triângulo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como na figura abaixo, é dada por:



$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \| \vec{u} \times \vec{v} \|$$

<u>Exemplo</u>: Calcular a área do triângulo de vértices $A = (-1, 0, 2)$, $B = (-4, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 3)$.



$$\vec{AB} = B - A = (-4, 1, 1) - (-1, 0, 2)$$

$$\boxed{\vec{AB} = (-3, 1, -1)}$$

$$\vec{AC} = C - A = (0, 1, 3) - (-1, 0, 2)$$

$$\boxed{\vec{AC} = (1, 1, 1)}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+1)\hat{i} + (-1+3)\hat{j} + (-3-1)\hat{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = (2, 2, -4)$$

$$\| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24}$$

Portanto, a área do triângulo é $\frac{\sqrt{24}}{2}$ u.a. (unidade de área).

* Duplo produto vetorial e produto misto:

- Dados três vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{V} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ definimos os produtos mistos e duplo, como:

• Produto misto: $\vec{u} \cdot (\vec{V} \times \vec{w})$

• Produto duplo: $\vec{u} \times (\vec{V} \times \vec{w})$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{V} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ e $\vec{w} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, determine o produto vetorial $\vec{u} \times (\vec{V} \times \vec{w})$.

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6+9)\hat{i} + (12+2)\hat{j} + (3-12)\hat{k} = 15\hat{i} + 14\hat{j} - 9\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{V} \times \vec{W} = (15, 14, -9)}$$

$$\vec{u} \times (\vec{V} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 15 & 14 & -9 \end{vmatrix} = (-27-70)\hat{i} + (75+18)\hat{j} + (28-45)\hat{k}$$

$$\vec{u} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = -97\hat{i} + 93\hat{j} - 17\hat{k} = (-97, 93, -17)$$