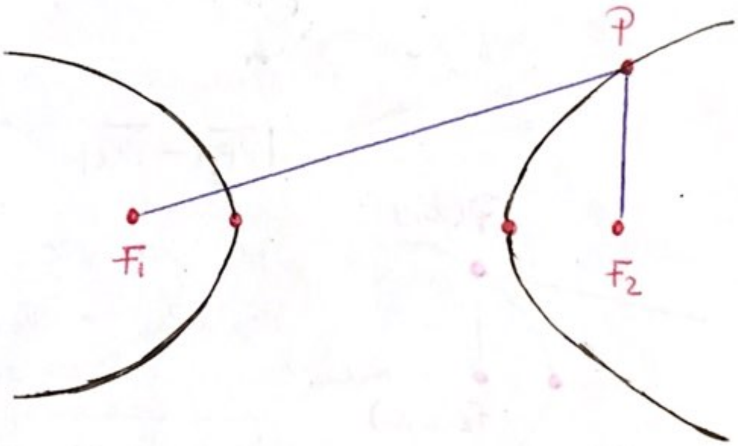
DISCIPLINA: Geometria Analítica - METR061
Prof.: Helben B. Gomes

UNIDADE 9: Hipérbolica

Nota: Faremos toda a abordagem levando-se em conta o Plano Cartesiano.

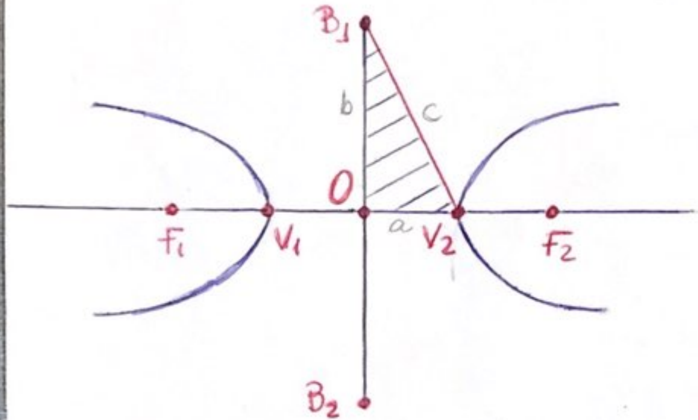
Nota 2: Muitas fórmulas e conceitos aplicáveis às hipérboles são muito similares às elipses. Assim, o pleno conhecimento de uma das cônicas implica no bom conhecimento da outra.

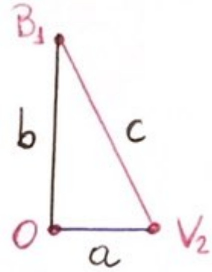
DEFINIÇÃO: Sejam dois pontos F_1 e F_2 do plano cartesiano e $2a$ uma distância qualquer. O lugar geométrico dos possíveis valores do ponto P tais que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ formam uma hipérbole.



$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



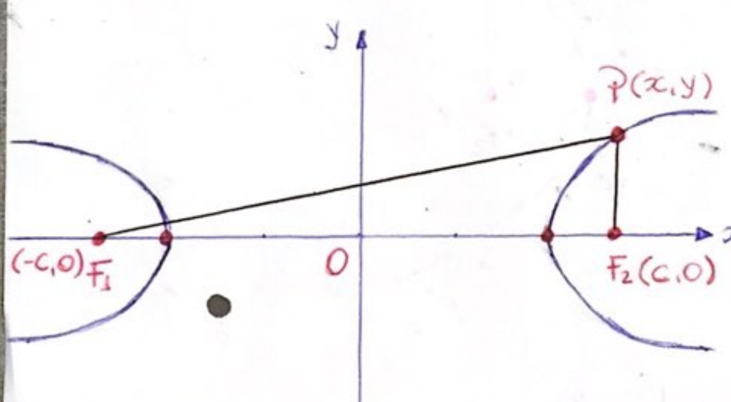


$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Elementos:

- F_1 e F_2: Focos da Hipérbole
- V_1 e V_2: Vértices da Hipérbole
- $\overline{F_1F_2}$: $2c$ (Distância Focal)
- $\overline{V_1V_2}$: $2a$ (Eixo Real) ou transverso
- $\overline{B_1B_2}$: $2b$ (Eixo Imaginário) ou conjugado
- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$

DEDUÇÃO DA FÓRMULA (1º Caso)



$$\begin{cases} \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \\ d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \overline{F_1F_2} = 2c \end{cases}$$

Aula

Para qualquer ponto, vale a relação

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

Se P está na curva direita, podemos afirmar que

$$PF_1 > PF_2 \rightarrow PF_1 - PF_2 = 2a$$

sem prejuízo da generalização

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

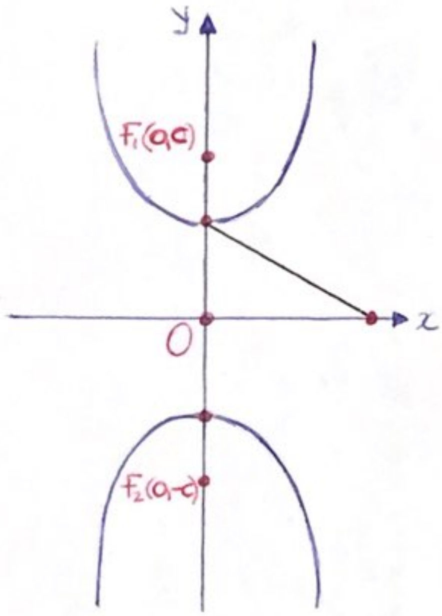
$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

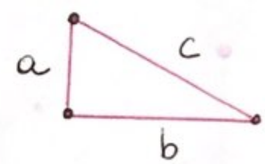
A partir deste ponto a dedução é idêntica à dedução da fórmula da elipse, exceto

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

FÓRMULA REDUZIDA (2º Caso)

O segundo caso e sua respectiva demonstração é análogo ao segundo caso da elipse mostrado na aula anterior (x^2 e y^2 "trocam de lugar").





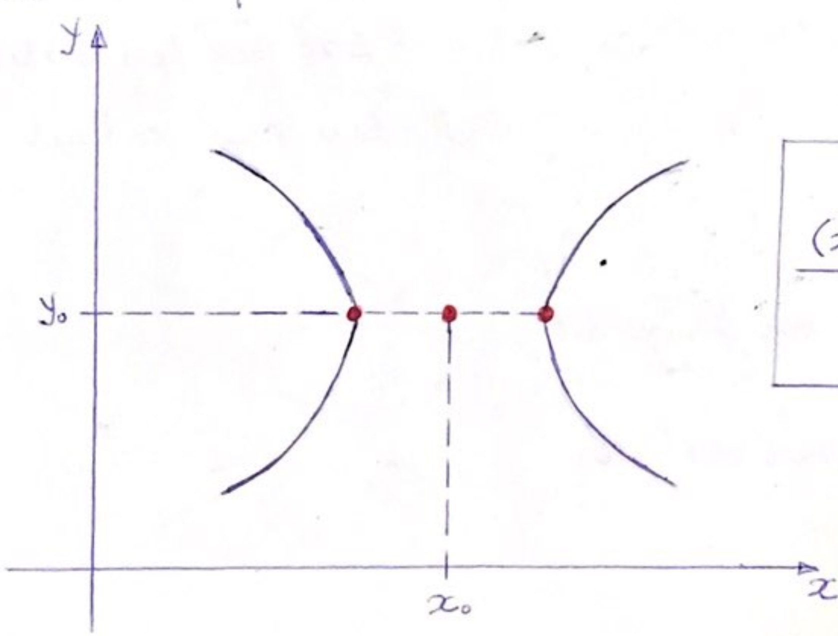
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Portanto, a equação fica:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

FÓRMULA REDUZIDA (3º Caso)

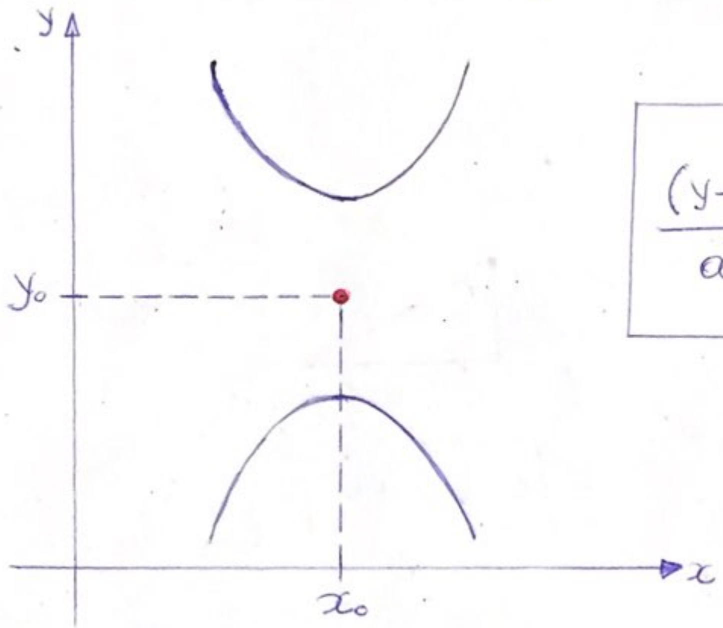
Este caso e o próximo também são análogos aos já vistos na aula de elipse.



$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

FÓRMULA REDUZIDA (4º Caso)

Este caso é identico ao quarto caso visto na aula de elipse



$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1}$$

HIPÉRBOLE HORIZONTAL X HIPÉRBOLE VERTICAL

Para saber se o eixo real da hipérbole é vertical ou horizontal é bastante simples:

* Basta observar a posição de x^2 e y^2 nos numeradores.

- Equações que "começam" com termos em x → Eixo real horizontal
- Equações que "começam" com termos em y → Eixo real vertical

Exemplos:

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ → eixo real horizontal

$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$ → eixo real vertical

Exemplo 1: Construa o gráfico da hipérbole cuja equação é
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

R/

Dica 1: Note que o eixo real é horizontal ("começa com x")

Dica 2: Na prova, quero a descrição formal, ou seja, note que a equação é do tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sendo, portanto, horizontal.

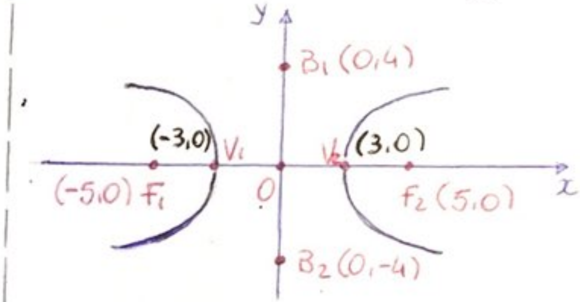
$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9 + 16$

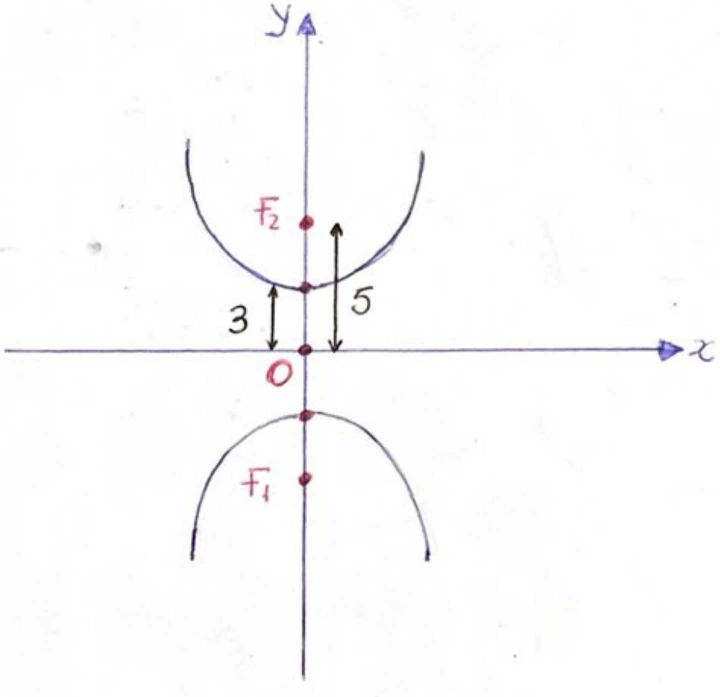
$c^2 = 25$

$\boxed{c = 5}$

$$\begin{cases} \text{Centro: } (0,0) \\ a = 3 \text{ (eixo real} = 6) \\ b = 4 \text{ (eixo imaginário} = 8) \\ c = 5 \text{ (distância focal} = 10) \end{cases}$$



Exemplo 2: Determine a equação da hipérbole a partir do gráfico abaixo.



R/ A equação é do tipo:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

Portanto, a equação fica:

$$\boxed{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$$

Exemplo 3: Dada a equação $-\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$:

a) Qual a medida da distância focal?

b) Qual a medida do eixo transverso (real)?

c) Qual a medida do eixo imaginário?

d) O eixo transverso é horizontal ou vertical?

e) Qual a excentricidade da hipérbole?

f) Faça o esboço do gráfico.

Resposta:

a) Primeiramente, vamos reescrever a equação acima na ordem correta.

$$\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$$

A equação é do tipo: $\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$

$$\begin{cases} \text{centro}: (2,3) \\ a^2=9 \rightarrow a=3 \\ b^2=16 \rightarrow b=4 \end{cases}$$

$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=9+16$$
$$c^2=25 \rightarrow \boxed{c=5}$$

Portanto, como a distância focal vale $2c$, temos que a distância focal $=10$.

b) Como o eixo real $=2a$, então o eixo real mede 6.

c) Como o eixo imaginário $=2b$, então o eixo imaginário mede 8.

d) O eixo real (transverso) é vertical.

e) $\frac{c}{a}=e \rightarrow \boxed{e=\frac{5}{3}\cong 1{,}66}$

f) 1º Passo: Achar F_1 e F_2

$$\begin{cases} \text{centro } (2,3) \\ \text{Hipérbole vertical} \\ a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

* Quando a hipérbole é vertical, os focos possuem a mesma abcissa do centro (valor em x). Logo, a abcissa para ambos os focos será 2.

* Como a hipérbole é vertical, teremos um foco acima do centro (5 unidades) e outro abaixo do centro (5 unidades). Lembre-se que $c = 5$.

Então, $F_1: (2, \overset{\overset{3}{\shortparallel}\atop y_0+5}{8})$ e $F_2: (2, \overset{\overset{3}{\shortparallel}\atop y_0-5}{-2})$

2º Passo: Achar V_1 e V_2

$$\begin{cases} \text{centro } (2,3) \\ \text{Hipérbole vertical} \\ a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

* Quando a hipérbole é vertical, os vértices possuem a mesma abcissa do centro (valor em x). Logo, a abcissa para ambos os vértices será 2.

* Como a hipérbole é vertical, teremos um vértice acima do centro (3 unidades) e outro abaixo do centro (3 unidades). Lembre-se que $a = 3$.

Então, $V_1: (2, \overset{\overset{3}{\shortparallel}\atop y_0+3}{6})$ e $V_2: (2, \overset{\overset{3}{\shortparallel}\atop y_0-3}{0})$

3º Passo: Achar B_1 e B_2

$$\begin{cases} \text{centro } (2,3) \\ \text{Hipérbole vertical} \\ a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

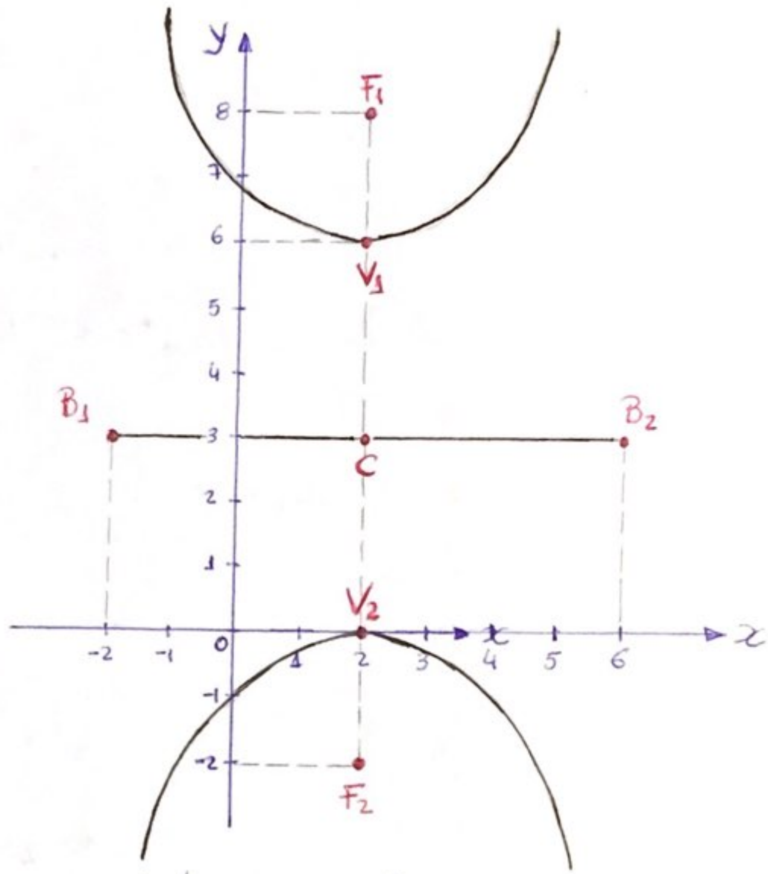
* Quando a hipérbole é vertical, os extremos do eixo imaginário possuem a mesma ordenada do centro (valor em y). Logo, a ordenada para ambos os ~~eixo~~ extremos do eixo imaginário será 3.

* Como a hipérbole é vertical, teremos um extremo do eixo imaginário à esquerda do centro (4 unidades) e outro à direita do centro (4 unidades). Lembre-se que $b = 4$.

Então, $B_1: (\overset{x_0-4}{-2}, 3)$ e $B_2: (\overset{x_0+4}{6}, 3)$

Finalmente, vamos colocar todos os pontos no gráfico.

$$\begin{cases} C\overset{x,\,y}{(2,3)} \\ F_1\,(2,8) \\ F_2\,(2,-2) \\ V_1\,(2,6) \\ V_2\,(2,0) \\ B_1\,(-2,3) \\ B_2\,(6,3) \end{cases}$$



Exemplo 4: Classifique em verdadeiro ou falso: Uma equação possível para hipérbole de focos $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{10}}{5}$ é $3x^2-2y^2=6$.

Resposta:

$$\begin{cases} c=\sqrt{5} \\ b^2=3 \\ a=\sqrt{2} \end{cases}$$

os focos são horizontais (possuem a mesma ordenada)
centro é o (0,0) (ponto médio da distância focal)

Logo, a equação é do tipo: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1 \quad \times(6)$$

$$\frac{6x^2}{2}-\frac{6y^2}{3}=6 \longrightarrow \boxed{3x^2-2y^2=6}$$ Portanto é verdadeiro.

EXERCÍCIOS - HIPÉRBOLE

1) Determine uma equação da hipérbole de focos $F(\pm 5,0)$ e vértices $V(\pm 3,0)$.

$\begin{cases} F_1(5,0) \\ F_2(-5,0) \end{cases}$ $\begin{cases} V_1(3,0) \\ V_2(-3,0) \end{cases}$

Foco em x

A equação é do tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, logo:

$$\frac{x^2}{(3)^2} - \frac{y^2}{(4)^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

$\begin{cases} a = 3 \\ c = 5 \end{cases}$ Usando pitágoras, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = (5)^2 - (3)^2 \rightarrow b^2 = 25 - 9 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow \boxed{b = 4}$$

2) Determine a equação reduzida da hipérbole de centro $C(2,-3)$ eixo ~~normal~~ imaginário paralelo ao eixo das ordenadas e comprimentos dos eixos transverso e conjugado iguais a 4 e 6, respectivamente.

$\begin{cases} C(2,-3) \\ \text{eixo real (transverso)} = 2a = 4 \rightarrow a = 4/2 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ \text{eixo imaginário (conjugado)} = 2b = 6 \rightarrow b = 6/2 \rightarrow \boxed{b = 3} \end{cases}$

A equação é do tipo: $\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$. Logo,

$$\frac{(x-2)^2}{(2)^2} - \frac{(y-(-3))^2}{(3)^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1}$$

3) Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ cujos eixo transverso (ou real) mede 4.

$\begin{cases} F_1(-3,0) \\ F_2(3,0) \\ \text{eixo transverso} = 2a = 4 \rightarrow a = \frac{4}{2} \rightarrow \boxed{a = 2} \end{cases}$

Dos focos, sabemos que $c = 3$

Por pitágora: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = (3)^2 - (2)^2 \rightarrow b^2 = 9 - 4 \rightarrow b^2 = 5$

$\boxed{b = \sqrt{5}}$

A equação é do tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \rightarrow \frac{x^2}{(2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1}$

4) Determine a equação da hipérbole com eixo real igual a 6 e focos $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$.

$$\begin{cases} F_1(-5,0) \\ F_2(5,0) \\ \text{eixo real} = 6 = 2a \rightarrow a = 6/2 \rightarrow \boxed{a=3} \end{cases}$$

Pelos focos, sabemos que $\boxed{c=5}$

Por pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = (5)^2 - (3)^2 \rightarrow b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16 \rightarrow b = \sqrt{16} \rightarrow \boxed{b=4}$

A equação é do tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{(3)^2} - \frac{y^2}{(4)^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$

5) Determine a distância focal da hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 25 \end{cases}$$

Por pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 25 \rightarrow c^2 = 34$

$c = \sqrt{34} \cong 5,83$, logo a dist. focal $= 2c = 2 \cdot (5,83)$

$11,661$

6) Determine a excentricidade da hipérbole de equação

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 25 \end{cases}$$

Por pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 16 + 25 \rightarrow c^2 = 41 \rightarrow c = \sqrt{41} = 6,4$

$e = \frac{c}{a} > 1 \rightarrow e = \frac{6,4}{4} \rightarrow \boxed{e = 1,6}$

7) Qual a medida da distância focal de uma hipérbole cuja medida do eixo conjugado (ou imaginário) é 24 e a medida do eixo transverso (ou real) é 10?

$$\begin{cases} \text{eixo real} = 2a = 10 \rightarrow a = 10/2 \rightarrow \boxed{a=5} \\ \text{eixo imaginário} = 2b = 24 \rightarrow b = 24/2 \rightarrow \boxed{b=12} \end{cases}$$

Por pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (5)^2 + (12)^2$

$c^2 = 25 + 144$

$c^2 = 169 \rightarrow c = \sqrt{169} \rightarrow \boxed{c = 13}$

A distância focal $= 2 \cdot c = 2 \cdot 13 = 26$

8) Classifique em Verdadeiro ou Falso: Uma equação possível para a hipérbole de focos $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{10}}{2}$ é $3x^2-2y^2=6$.

1º) determinar a distâncias entre os focos $\overline{F_1F_2}$, pois automaticamente eu obtenho a distância focal (2c).

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$2c=\sqrt{(-\sqrt{5}-\sqrt{5})^2+(0-0)^2}$$
$$2c=\sqrt{(-2\sqrt{5})^2}$$

Lembrando que $\sqrt{x^2}=|x|$, temos:

$$2c=|-2\sqrt{5}|$$
$$2c=2\sqrt{5}\rightarrow c=\frac{2\sqrt{5}}{2}\rightarrow \boxed{c=\sqrt{5}}$$

Sabemos também que $e=\sqrt{10}/2$, logo

$$e=\frac{c}{a}\rightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{a}\rightarrow \sqrt{10}\cdot a=2\sqrt{5}$$

$a=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (precisamos racionalizar pois não posso deixar o denominado com raiz quadrada)

Lembrando que $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, temos:

$$a=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\rightarrow a=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2\cdot 5}}\rightarrow a=\frac{2\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}\rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{2}}\rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{a=\sqrt{2}}$$

Por pitágoras: $c^2=a^2+b^2\rightarrow b^2=c^2-a^2\rightarrow b^2=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2\rightarrow b^2=5-2$

$$b^2=3\rightarrow \boxed{b=\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} c=\sqrt{5} \\ b=\sqrt{3} \\ a=\sqrt{2} \end{cases}$$

* Os focos são horizontais (possuem a mesma ordenada)
* Centro é o (0,0) (ponto médio da distância focal)

$$\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}=0$$

Logo, a equação é do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1 \times(6) \rightarrow \frac{6x^2}{2}-\frac{6y^2}{3}=1 \rightarrow \boxed{3x^2-2y^2=6}$$

Verdadeiro