UNIDADE 8 - Elipse

Nesta aula estudaremos a Elipse. Iremos ver detalhadamente:

* Aplicações
* Definição
* Equações

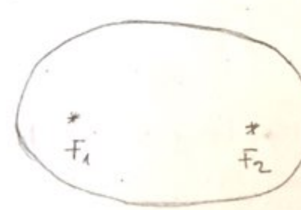
Nota: Faremos toda a abordagem levando-se em conta o Plano Cartesiano.

APLICAÇÕES E OCORRÊNCIAS

* A trajetória que os planetas fazem em torno do Sol é elíptica.
* Algumas obras da arquitetura são baseadas neste formato (o pátio do Coliseu Romano).
* Bola de futebol americano.

OBTENÇÃO - VISÃO INTUITIVA

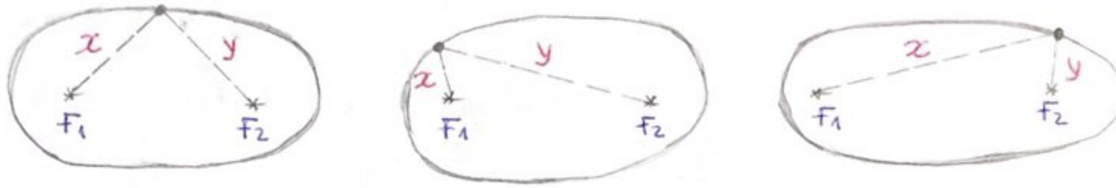
Uma elipse pode ser facilmente obtida pelo seguinte modo: Por exemplo, fixe 2 suportes no chão e amarre as pontas de uma corda - não esticada - nos suportes. Estique a corda com um bastão. A curva desenhada pelo bastão é uma ELIPSE.



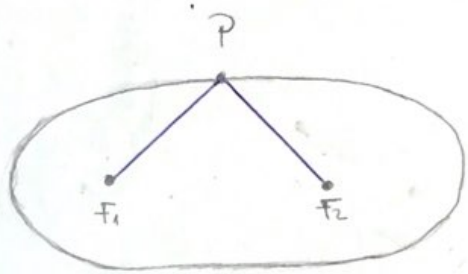
Focos da Elipse $\begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases}$

Neste exemplo, as duas estacas representam os FOCOS da elipse.

Nota: O comprimento da corda é constante e não depende da posição do bastão. Note: $x + y$ = comprimento da corda, SEMPRE.



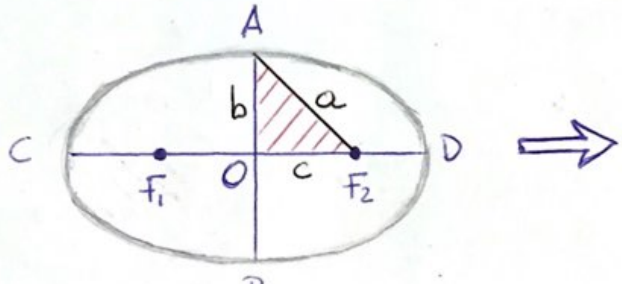
DEFINIÇÃO: Sejam F_1 e F_2 e P três pontos distintos de um plano e $2a$ uma distância qualquer tomada neste mesmo plano onde $2a > \overline{F_1F_2}$. A elipse é o lugar geométrico dos pontos deste plano onde $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

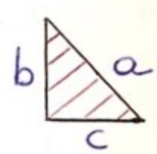


$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

ELEMENTOS DA ELIPSE

Os principais elementos da elipse estão listados abaixo:





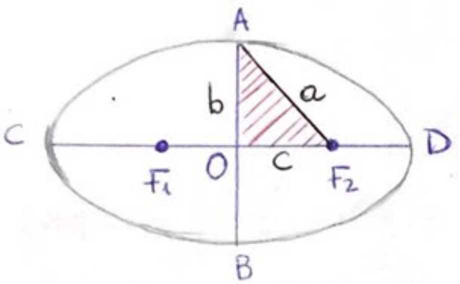
Por Pitágoras

$a^2 = b^2 + c^2$

- F_1 e F_2: Focos
- $\overline{F_1F_2}$: Distância Focal $(2c)$
- O: Centro
- $\overline{AB}$: Eixo Menor $(2b)$
- $\overline{CD}$: Eixo Maior $(2a)$

EXCENTRICIDADE

É a razão entre as medidas c e a (metade da distância focal e do eixo maior, respectivamente).



* A excentricidade da circunferência vale zero.
* Quanto maior o valor, mais "achatada" é a elipse.
* Quanto menor o valor, mais "arredondada" é uma elipse.

$$\text{Excentricidade} = \frac{c}{a}$$

Na Elipse: $\frac{c}{a} < 1$

Obs: Na elipse, a excentricidade será sempre menor que 1. Na realidade entre 0 e 1. Não existe excentricidade negativa.

Exemplo Prático: sistemas ~~atmosféricos~~ convectivos de Mesoescala - SCM

(i)

Complexos Convectivos de Mesoescala

(ii)

LI → Linhas de Instabilidades

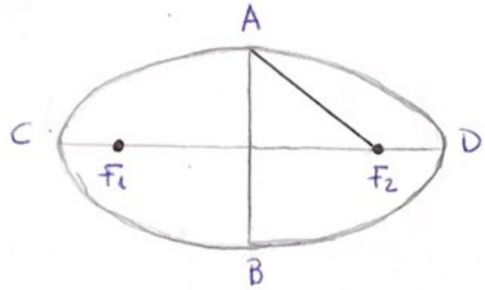
(i) ε = Excentricidade $= \frac{c}{a} = 0$ → Pensando no desenvolvimento máximo do sistema estágio maduro.

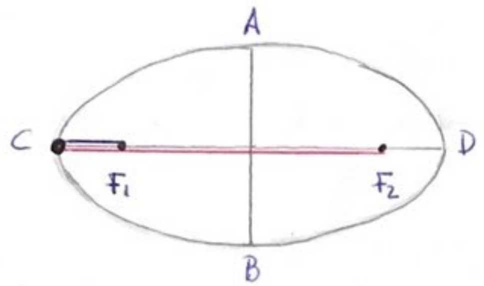
(ii) ε = Excentricidade $= \frac{c}{a} = 1$

→ Pensando na forma de uma reta.

DEMONSTRAÇÃO 1

Vamos provar que o segmento $\overline{CD}$ (eixo maior) possui medida $2a$.





A demonstração é quase imediata:

$m(\overline{CF_1}) = m(\overline{DF_2})$ (simetria)

$m(\overline{CF_1}) + m(\overline{CF_2}) = 2a$ (pois C é ponto da elipse)

$m(\overline{CF_1}) + m(\overline{CF_2}) = m(\overline{CF_2}) + m(\overline{DF_2}) = m(\overline{CD})$

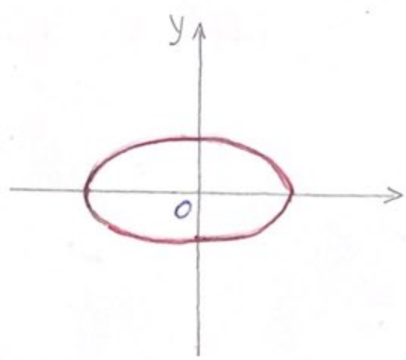
Logo,

$$m(\overline{CD}) = 2a$$

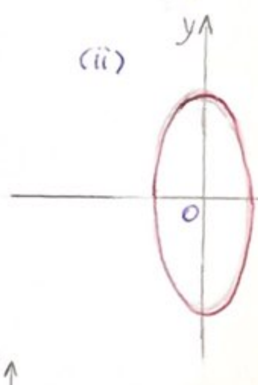
EQUAÇÕES DA ELIPSE

Existem 4 casos, com 4 equações distintas. Em todos casos, os eixos da elipse são paralelos aos eixos x e y.

(i)

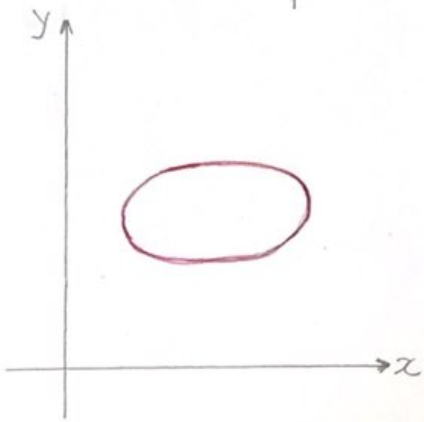


(ii)

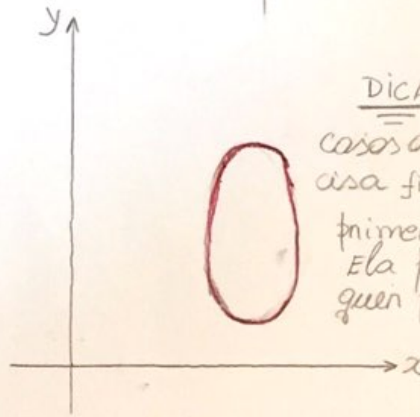


DICA 1: Você não precisa saber os dois primeiros casos. Basta apenas guardar os dois últimos.

(iii)



(iv)



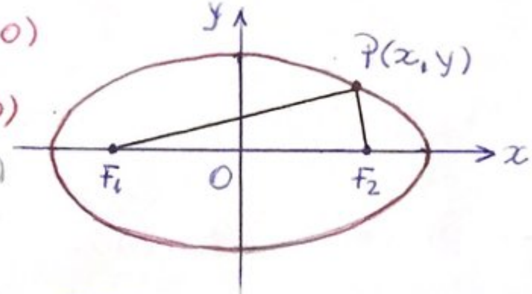
DICA: No (iii) e (iv) casos a elipse não precisa ficar restrita ao primeiro quadrante. Ela pode ocupar qualquer posição no plano cartesiano.

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA (PARTE 1)

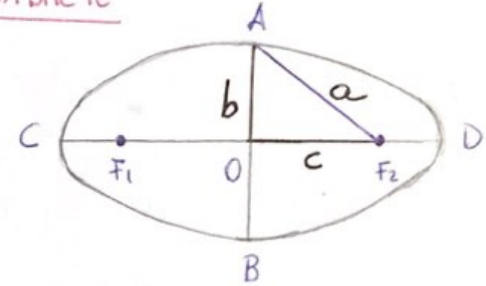
1º Caso: Eixo maior paralelo ao eixo x e centro coincidente com a origem do plano cartesiano:

$$\begin{cases} F_1(-c,0) \\ F_2(c,0) \end{cases}$$

P(x,y)



Lembrete



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\begin{cases} d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \end{cases}$$

$$\underbrace{\boxed{\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}}}_{\overline{PF_1}} + \underbrace{\boxed{\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}}}_{\overline{PF_2}} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ (Elevando ambos os lados ao quadrado)

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Lembrando que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$-4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + (x+c)^2 + \cancel{y^2} - (x-c)^2 - \cancel{y^2}$$

$$-4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 - (x^2 - 2xc + c^2)$$

$$-4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} + 2xc - \cancel{c^2}$$

$$-4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{\cancel{4}(-a^2 + xc)}{-\cancel{4}a}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{(-a^2 + xc)}{-a}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{(xc - a^2)}{-a}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$(x-c)^2 + y^2 = \frac{(xc - a^2)^2}{a^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \frac{x^2c^2 - 2a^2xc + a^4}{a^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \frac{x^2c^2}{a^2} - 2xc + a^2$$

Colocando os termos em x para o primeiro membro:

$$x^2 - \cancel{2xc} - \frac{x^2c^2}{a^2} + \cancel{2xc} = a^2 - c^2 - y^2$$

$$x^2 - \frac{x^2c^2}{a^2} = a^2 - c^2 - y^2$$

Somando os termos do primeiro membro:

$$\frac{a^2x^2 - x^2c^2}{a^2} = a^2 - c^2 - y^2$$

$$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2} = a^2 - c^2 - y^2$$

lembrando que $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$, temos:

$$\frac{x^2b^2}{a^2} = b^2 - y^2$$

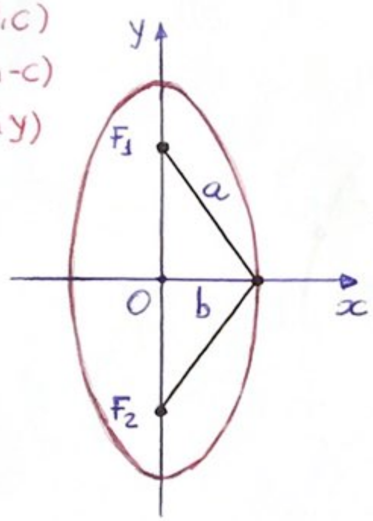
$$\frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \quad (\div b^2)$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$ $\longrightarrow$ Equação reduzida da Elipse (1º caso)

EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE (2º caso)

$$\begin{cases} F_1(0,c) \\ F_2(0,-c) \\ P(x,y) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \\ d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-(-c))^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = 2a$$

$$\boxed{\sqrt{x^2+(y+c)^2} + \sqrt{x^2+(y-c)^2} = 2a}$$

lembrando que

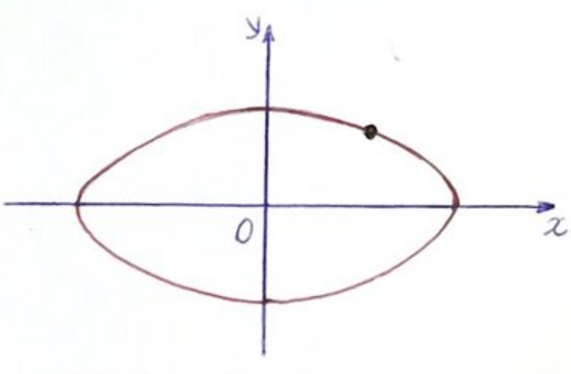
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Note que x "trocou de lugar com y". Logo, temos:

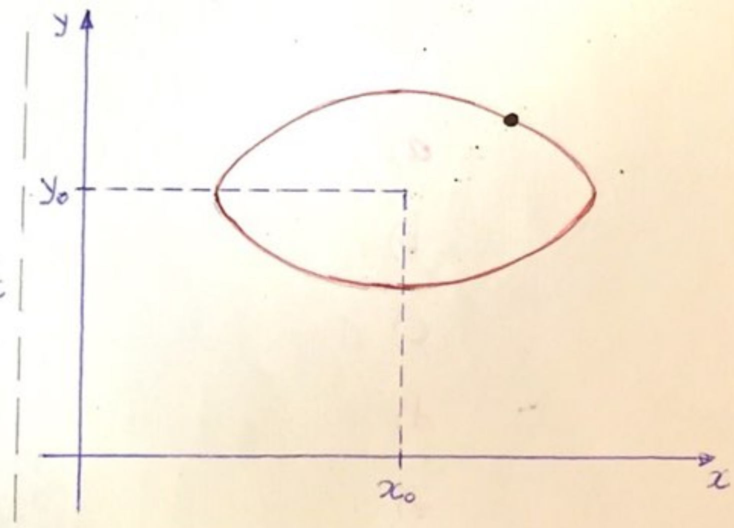
$$\sqrt{x^2+(y\mp c)^2} + \sqrt{x^2+(y+c)^2} = 2a \to \boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

TERCEIRO CASO

Vamos supor que as coordenadas do centro da elipse sejam (0,0). Se as coordenadas do centro da elipse sofrerem uma translação de (x_0, y_0), então todos os pontos sofrerão esta mesma translação.



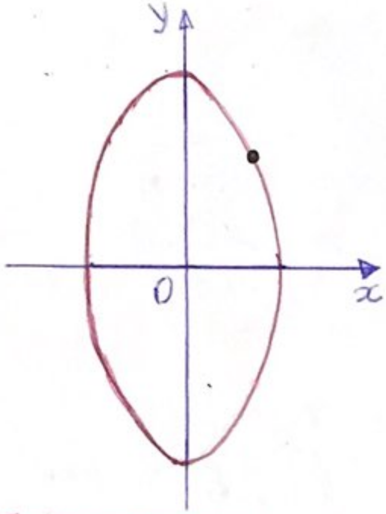
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



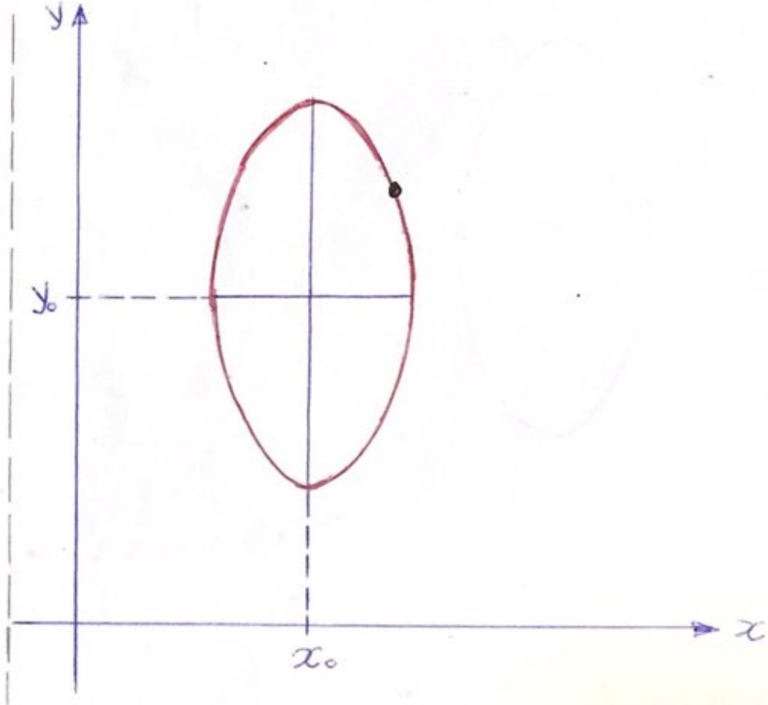
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

QUARTO CASO

Analogamente ao terceiro caso:



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$



$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1}$$

Exemplo: Seja a equação da elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.
Determine:

a) O esboço do gráfico da elipse.

b) A distância focal e coordenadas dos focos.

c) A medida do eixo maior

d) A medida do eixo menor

e) A excentricidade

a) O esboço do gráfico da elipse

A equação reduzida da elipse com centro (0,0) é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \rightarrow \text{(eixo maior horizontal)}$$

ou

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1} \rightarrow \text{(eixo maior vertical)}$$

Note que o maior denominador no primeiro membro está abaixo de x^2. Logo, a elipse é horizontal (possui eixo maior horizontal).

Portanto, a equação reduzida da elipse com centro (0,0) é:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1 \quad \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

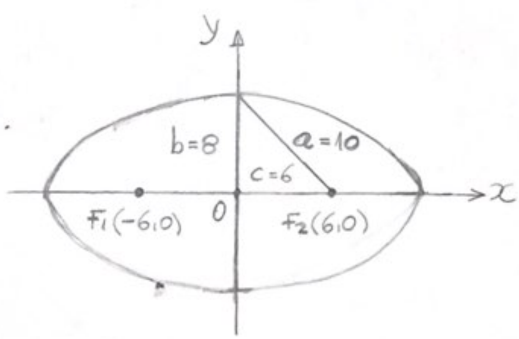
$$100=64+c^2$$

$$c^2=100-64$$

$$c^2=36$$

$$c=\sqrt{36} \rightarrow \boxed{c=6}$$

$$\begin{cases} a=10 \rightarrow \text{eixo maior} = 2a = 20 \\ b=8 \rightarrow \text{eixo menor} = 2b = 16 \\ c=6 \rightarrow \text{dist. focal} = 2c = 12 \end{cases}$$



b) A distância focal e coord. dos focos $c=6=2c=12$; $F_1(-6,0)$ e $F_2(6,0)$

c) A medida do eixo maior $a=10=2\cdot a=20$

d) A medida do eixo menor $b=8=2b=16$.

e) A excentricidade $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ ou 0,6

EXERCÍCIOS - ELIPSE

1) Determine os focos e a excentricidade da elipse:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ $\quad$ 1º) $a > b$, logo a elipse é horizontal (eixo maior horizontal)

a $\quad$ b

Por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 7 \end{cases}$

$16 = 7 + c^2 \rightarrow c^2 = 16 - 7 \rightarrow c^2 = 9 \rightarrow c = \sqrt{9} \rightarrow \boxed{c = 3}$

Assim, $F_1 = (3,0)$ e $F_2 = (-3,0)$.

A excentricidade $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{\varepsilon = 0,75}$ $\underline{< 1}$

$21x^2 + 25y^2 - 525 = 0$ ou

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ $\quad$ 1º) $a > b$, logo a elipse é horizontal (eixo maior H)

Por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 21 \end{cases}$

$25 = 21 + c^2 \rightarrow c^2 = 25 - 21 \rightarrow c^2 = 4 \rightarrow c = \sqrt{4} \rightarrow \boxed{c = 2}$

Assim, $F_1 = (2,0)$ e $F_2 = (-2,0)$.

A excentricidade $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{\varepsilon = 0,4}$ $\underline{< 1}$

c) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$ $\quad$ 1º) $a < b$, logo a elipse é vertical (eixo maior V)

Por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ $\begin{cases} a^2 = 15 \\ b^2 = 6 \end{cases}$

$15 = 6 + c^2 \rightarrow c^2 = 15 - 6 \rightarrow c^2 = +9 \rightarrow +c^2 = 9 \rightarrow +c = \sqrt{9} \rightarrow +c = 3$

$\boxed{c = +3}$

Assim, $F_1 = (0,-3)$ e $F_2 = (0,3)$

A excentricidade $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{15}}$ $\quad \boxed{\varepsilon = 0,77}$

2) Usando a definição, obter a equação da elipse de focos $F_1(0,-1)$ e $F_2(0,1)$ e eixo maior $2a = 4$.

$x=0$, logo o eixo maior é vertical. A equação é do tipo: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\left.\begin{array}{l} F_1 = (0,-1) \\ F_2 = (0,1) \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{c = +1}$

eixo maior: $2a=4 \rightarrow a = \frac{4}{2} \rightarrow \boxed{a=2}$

Por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = (2)^2 - (+1)^2 = b^2 = 4-1 \rightarrow b^2 = 3 \rightarrow \boxed{b=\sqrt{3}}$

A eq. da elipse fica: $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1}$

3) Em uma elipse a medida do eixo maior é 26 e a medida do eixo menor é 24. Determine a distância focal dessa elipse.

- eixo maior $= 2a = 26 \rightarrow a = \frac{26}{2} \rightarrow a = 13$
- eixo menor $= 2b = 24 \rightarrow b = \frac{24}{2} \rightarrow b = 12$

Por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = (13)^2 - (12)^2 \rightarrow c^2 = 169 - 144 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = \sqrt{25}$

$\boxed{c = 5}$

Logo, a distância focal dessa elipse é: $2 \cdot c = 2(5) =$ $\boxed{10 \text{ UNIDADES}}$

4) Dada a equação de uma elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Quais são as medidas dos seus eixos maior e menor?

$a^2 = 25 \rightarrow a = \sqrt{25} \rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \rightarrow b = \sqrt{16} \rightarrow b = 4$

Assim, (1) Eixo maior $= 2 \cdot a = 2 \cdot 5 =$ $\boxed{10 \text{ Unidades}}$

(2) Eixo menor $= 2 \cdot b = 2 \cdot 4 =$ $\boxed{8 \text{ Unidades}}$

5) Prove que esses dados são realmente de uma elipse

$P(12,9)$, $F_1(5,0)$ e $F_2(-5,0)$.

$F_1 = (5,0)$

$F_2 = (-5,0)$

$c = 5$ e dist. focal $= \underline{10\ Un}$

$$\boxed{dPF_1 + dPF_2 > dF_1, F_2}$$

$$\sqrt{(12-5)^2+(9-0)^2} + \sqrt{(12-(-5))^2+(9-0)^2} > 10$$

$$\sqrt{(7)^2+(9)^2} + \sqrt{(17)^2+(9)^2} > 10$$

$$\sqrt{49+81} + \sqrt{289+81} > 10 \rightarrow \sqrt{130}+\sqrt{370} > 10$$

$$11,40 + 19,33 > 10 \rightarrow \boxed{30,635 > 10} \rightarrow \text{Provado que é elipse.}$$

6) Se $b = 3$, $c = 20$, quanto vale $\underline{a}$, eixo menor, eixo maior e excentricidade?

$\begin{cases} b = 3 \\ c = 20 \end{cases}$ por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = (3)^2 + (20)^2 \rightarrow a^2 = 9 + 400$

$$a^2 = 409 \rightarrow a = \sqrt{409} \rightarrow \boxed{a = 20,22}$$

- eixo maior: $2 \cdot a = 2 \cdot (20,22) = \boxed{40,44}$
- eixo menor: $2 \cdot b = 2 \cdot (3) = 6$
- excentricidade $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{20}{20,22} \rightarrow \boxed{\varepsilon \cong 0,98}$ $\underline{< 1}$

7) As coordenadas dos focos da elipse são? Dado: $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{225} = 1$

1°) $a < b$, logo o eixo maior é ~~[illegible]~~ vertical

$\begin{cases} a^2 = 39 \\ b^2 = 225 \end{cases}$ por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 39 - 225$

$$c^2 = -186 \rightarrow c = \sqrt{-186} \rightarrow |C| = 13,63$$

$F_1 = (-13,63\ ,0)$

$F_2 = (13,63\ ,0)$

obs: não é elipse!

8) A equação da elipse que tem focos $F_1(-1,0)$ e $F_2(1,0)$ e excentricidade = 0,75 será?

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} F_1 = (-1,0) \\ F_2 = (1,0) \end{array}\right\} \boxed{c = +1} \\ \varepsilon = 0,75 \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{+1}{0,75} \rightarrow \boxed{a = +1,33}$$

por pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$$b^2 = (+1,33)^2 - (+1)^2 \rightarrow b^2 = 1,77 - 1 \rightarrow b^2 = 0,77$$

$$b = \sqrt{0,77} \rightarrow \boxed{b = 0,87}$$

Logo, a equação da elipse será: $\boxed{\frac{x^2}{1,77} + \frac{y^2}{0,76} = 1}$