UNIDADE 6 – Distâncias

Distância entre Dois Pontos

Dados os pontos $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, a distância d entre eles é $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$. Como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

tem-se

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Exemplo: Calcule a distância entre $P_1=(2,-1,3)$ e $P_2=(1,1,5)$.

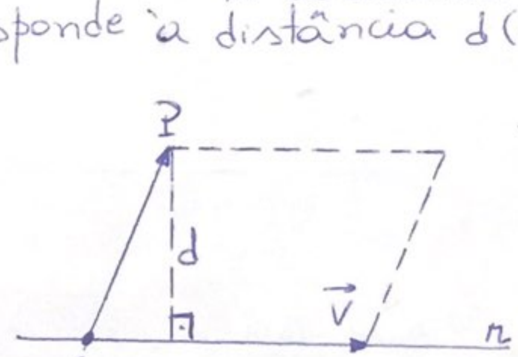
Como $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,1,5)-(2,-1,3) = (-1,2,2)$

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(-1)^2, 2^2, 2^2} = \sqrt{1,4,4} = \sqrt{9} = 3\ u.c.\ \text{(unid. de comp.)}$$

Distância de um ponto a uma reta

Dado um ponto P do espaço e uma reta r, quer-se calcular a distância $d(P,r)$ de P e r. Considerando na reta r um ponto A e um vetor diretor $\vec{v}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância $d(P,r)$.

A área A do paralelogramo é dada por



a) $A = (\text{base})\times(\text{altura}) = \|\vec{v}\|\cdot d$

ou também por

b) $A = \|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\|$

comparando a) e b), tem-se $d = d(P,r) = \dfrac{\|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$.

Exemplo: Calcular a distância do ponto $P=(2,1,4)$ à reta

$$r: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

A reta passa pelo ponto $A=(-1,2,3)$ e tem direção do vetor $\vec{v}=(2,-1,-2)$. Seja ainda o vetor $\overrightarrow{AP} = P-A = (3,-1,1)$. Calculemos

$$\vec{v}\times\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-2)\hat{i} + (-6-2)\hat{j} + (-2+3)\hat{k} = -3\hat{i}-8\hat{j}+\hat{k}$$

$$\vec{v}\times\overrightarrow{AP} = (-3,-8,1)$$

Portanto,

$$d(P,r) = \frac{\|(-3,-8,1)\|}{\|(2,-1,-2)\|} = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-8)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{9+64+1}}{\sqrt{4+1+4}} = \boxed{\frac{\sqrt{74}}{3}\ u.c}$$

Exemplo: Calcule a distância entre o ponto $P=(1,-2,3)$ e a reta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

temos: $P=(1,-2,3)$ e $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ → reta simétrica

Obs: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

Portanto, $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$ → vetor e $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=2 \\ z_0=3 \end{cases}$ → ponto A

Assim, $\overrightarrow{AP} = P-A = (1,-2,3)-(-1,2,3) = (2,-4,0)$. Logo,

$$d(P,r) = \frac{\|(2,3,4)\times(2,-4,0)\|}{\|(2,3,4)\|} \qquad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (16,8,-14)$$

Então,

$$d(P,r) = \frac{\|(16,18,-14)\|}{\|(2,3,4)\|} = \frac{\sqrt{(16)^2+(18)^2+(-14)^2}}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(4)^2}} = \frac{\sqrt{256+64+196}}{\sqrt{29}}$$

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{516}}{\sqrt{29}} \cong \boxed{4,22\ u.c.}$$

Distância de Plano a Ponto

Considerando um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, tem-se:

$$d(P_0, \pi) = \frac{\|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo: calcular a distância do ponto $P_0 = (4, 2, -3)$ ao plano $\pi: 2x + 3y - 6z + 3 = 0$.

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -6 \\ d = 3 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -3 \end{cases}$$

Assim,

$$d(P_0, \pi) = \frac{\|2(4) + 3(2) - 6(-3) + 3\|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{\|8 + 6 + 18 + 3\|}{\sqrt{4 + 9 + 36}}$$

$$d(P_0, \pi) = \frac{35}{\sqrt{49}} = \frac{35}{7} = 5$$

Distância entre Reta e Plano

A fórmula de distância de plano a ponto também é aplicada a planos paralelos e plano e reta paralelos.

Exemplo: calcule a distância da reta $r: (x, y, z) = (2, 3, 1) + t(1, 2, 0)$ ao plano $\pi: 4x - 4y + 2z - 7 = 0$.

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 2 \\ d = -7 \end{cases} \rightarrow \text{vetor} \quad e \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \\ z_0 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{reta}$$

$$d(r,\pi) = \frac{\|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(r,\pi) = \frac{\|4(2) - 4(3) + 2(1) - 7\|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{\|8 - 12 + 2 - 7\|}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{\|-9\|}{\sqrt{36}}$$

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{9}{6} = 1{,}5}$$

Distância entre Duas Retas

Dada as retas r_1 e r_2, quer-se calcular a distância $d = (r_1, r_2)$. Podemos ter os seguintes casos:

1) r_1 e r_2 são concorrentes (quase paralelismo).

Neste caso: $d(r_1, r_2) = 0$

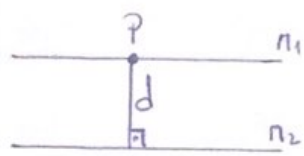
2) r_1 e r_2 são paralelas.

Neste caso:

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_2) \text{ com } P \in r_1$$

ou

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_1) \text{ com } P \in r_2$$



A figura ilustra essa situação, que se reduz ao cálculo da distância de ponto à reta, ou seja,

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

3) r_1 e r_2 são reversas. (contrárias).

Neste caso:

$$d = d(r_1, r_2) = \frac{\|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{A_1A_2}\|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}$$

Exemplo: Calcule a distância entre as retas reversas

$$r_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad e \quad r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}.$$

A reta r_1 passa pelo ponto $A_1 = (-1, 3, 1)$ e tem direção de $\vec{v}_1 = (1, -2, -1)$ e a reta r_2 pelo ponto $A_2 = (0, -3, 1)$ e tem direção de $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$.

Então, $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (0, -3, 1) - (-1, 3, 1) = (1, -6, 0)$ e

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (0-6)\cdot 1 + (-1-0)\cdot(-2) + (0-1)\cdot(-1)$$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = -6 + 2 + 1 = -6 + 3 = -3$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2+1)\hat{i} + (0+1)\hat{j} + (1+0)\hat{k} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (3, 1, 1)$$

Portanto,

$$d(r_1, r_2) = \frac{\|-3\|}{\|(3,1,1)\|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{11} \text{ ou } 0{,}90}$$